

離散時間系に対する最適追従制御問題の解析解

岡島 寛*・浅井 徹**・川路 茂保*

Closed-form Expression of Optimal Tracking Control Problem for Discrete Time Systems

Hiroshi OKAJIMA*, Toru ASAI** and Shigeyasu KAWAJI*

This paper is concerned with optimal reference tracking control problem for discrete time 1-DOF/2-DOF systems. It is well known that l_2 norm of an error, which is defined by difference between an output and a reference, does not turn zero for all possible controllers when plant is given as a non-minimum phase system. Purpose of this research is to derive closed-form expression of the optimal value of l_2 norm of the error and its controller. The references for tracking are e.g. step, sine, impulse train, triangle wave and linear combination of these signals. Therefore, we can handle various signals as a reference. Moreover, our results can also characterize impact of the relative degree of plant. Those effectiveness are shown by numerical examples.

Key Words: discrete time systems, performance limitations, reference tracking, optimal control, achievable sets of outputs

1. はじめに

近年、制御対象と達成可能な制御性能との関係に着目して、制御しやすいシステムの特徴付けに関する研究^{1),2)}が行なわれている。制御性能の向上を考える際には、与えられた制御対象に対してどのような制御器を設計するだけでなく、その前段階として、制御対象そのものが制御しやすいものであることも重要である。制御対象を設計する際に物理的な制約だけでなく“制御しやすさ”に関する設計仕様も考えることで、制御器を含む最終段階において制御性能の向上が見込まれる。

制御しやすいシステムの特徴付けに関連して制御性能限界をパラメトリックに求める研究³⁾⁻¹³⁾が多く行なわれている。これらの研究では、制御対象の特性パラメータ(極や零点など)を用いて、追従制御問題における過渡応答の最適値を陽に表現している。最適値を求めることは、与えられた制御対象の本質的な性能限界を見積もることを意味する。最適値を求めることのみが目的である場合は、LMIなどを用いて数値的に求めることが考えられるが、制御対象のパラメータ値が与えられなければ解けないことから、どのように制御対象の特性を変更することが制御性能向上につながるかは数値的に

解いた結果から定かではない。一方、制御対象のパラメータの関数として最適値を求めることで、制御対象のどの性質が制御性能の改善に効果的かが明らかになる。

最適値と制御対象パラメータとの関係に関するさまざまな研究が行なわれているが、離散時間系に対する結果は少ない⁷⁾⁻¹¹⁾。特に、ステップ目標値への追従問題に関しては、追従偏差の l_2 ノルムの最小値に関する結果^{7),9)}や追従偏差と入力の大さきの同時最小化に関する結果¹¹⁾などが導かれているのに対し、それ以外の参照信号へ追従する場合には2自由度系で正弦波⁸⁾に対する結果しか導かれていない。

本論文では、1自由度および2自由度の離散時間制御系に関して、正弦波を含むより広いクラスの参照信号への追従問題に対するパラメトリックな最適値の導出を行なう。その際、追従制御性能の評価指標として、参照信号と制御出力との偏差信号の l_2 ノルムを用いる。したがって、それぞれの制御系について l_2 ノルムの最小値を制御対象パラメータを用いて陽に求めることを目的とする。このとき、最適値(偏差信号の l_2 ノルムの最小値)を求めるだけでなくそれを達成する制御器も解析的に求める点に特徴がある。1自由度制御系については、従来考えられていないステップ以外の参照信号へ追従する場合の最適値を導いている。また、2自由度制御系については正弦波に対する結果⁸⁾が与えられているが、インパルス列やステップ、正弦波、三角波、それらの和など、文献8)の信号を含むより広いクラスの参照信号を扱える。また、参照信号の具体的な形に依存せずに扱える点、制御対象の相対次数を考慮した最適値を導く点でも従来と異なったものとなっている。

また、連続時間系の場合¹³⁾と同様に、漸近的に追従偏差が零となりかつ安定な制御系によって生成される制御出力の

* 熊本大学自然科学研究科 熊本市黒髪 2-39-1

** 大阪大学工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto

** Graduate School of Engineering, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita

(Received March 13, 2008)

(Revised September 23, 2008)

集合を導出し、その集合を利用した計算により追従偏差の l_2 ノルムの最適値を導出する。なお、解析的に最適値を求める手順は文献 13) と同じであるが、離散時間系の場合には相対次数が制御性能に与える影響は連続時間系のそれと異なる。連続時間系の場合には制御対象の相対次数は最適値に影響を与えないのに対し、離散時間系の場合には相対次数の影響が現れる。そのため、集合を用いた最適値の計算方法が連続時間系の場合と異なる。

本論文で用いる記号を以下に記す。 i, j, k, l, t は整数を表わし、特に k は非負整数で k 番目の離散時刻の表記に用いる。また、信号 $x(k)$ の z 変換を $\hat{x}(z)$ と書く。すなわち、

$$\hat{x}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (1)$$

で与えられるものとする。 $\|x\|_2^2$ は $x(k)$ の l_2 ノルムの二乗

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 \quad (2)$$

である。複素平面上で $|z| < 1$ となる点 z の集合を \mathcal{D} とし、その補集合を \mathcal{D}^C とする。プロパーかつ \mathcal{D}^C で解析的な有理関数の集合を \mathcal{S} とする。また、単位円周上に極をもたない有理関数の集合を \mathcal{D}^M とし、関数 $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{D}^M$ の内積は以下で与えられる。

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}^H(e^{j\theta}) \hat{g}(e^{j\theta}) d\theta \quad (3)$$

ただし、 \hat{f}^H は \hat{f} の複素共役転置である。このとき、 $\|\hat{f}\|_2^2 := \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$ と表わされる。1 自由度制御系、2 自由度制御系について、必要に応じて添字 1-DOF, 2-DOF を用いて区別する。また、特に最適なものは * を用いて表わす。

2. 問題設定

2.1 制御対象および考える制御系

m_p 個の不安定零点 $\eta_1, \dots, \eta_{m_p}$ および n_p 個の不安定極 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p}$ をもつ相対次数 h_p の SISO の制御対象を考える。制御対象の離散時間伝達関数を $P(z)$ とし、次式で与えられるものとする。

$$P(z) = \frac{\prod_{i=1}^{m_p} (z - \eta_i)}{\prod_{j=1}^{n_p} (z - \lambda_j)} P_0(z) \quad (4)$$

ただし、 $P_0(z)$ は安定かつ最小位相、相対次数が $h_p - n_p + m_p$ の伝達関数である(制御対象 $P(z)$ において、 h_p が大きければ大きいほど制御出力に制御入力の影響が現れるまでのステップ数は大きくなる)。また、 η_i はすべて異なり、さらに $|\eta_i| > 1$ であるものとする。 λ_l についても同様に考える。すなわち、

$$\eta_i \neq \eta_j \quad \forall i \neq j, \quad |\eta_i| > 1 \quad \forall i = 1, \dots, m_p \quad (5)$$

$$\lambda_l \neq \lambda_t \quad \forall l \neq t, \quad |\lambda_l| > 1 \quad \forall l = 1, \dots, n_p \quad (6)$$

とする。制御入力と制御出力をそれぞれ $u(k)$, $y(k)$ とすると

$$\hat{y}(z) = P(z)\hat{u}(z) \quad (7)$$

となる。

与えられた制御対象 $P(z)$ に対し、Fig. 1 の 1 自由度制御系および Fig. 2 の 2 自由度制御系により制御を行なう場合を考えることとする。1 自由度制御系では $C(z)$ の選び方のみで安定性や応答特性が決まる。一方、Fig. 2 の 2 自由度制御系では r から y までの伝達関数は $G_2(z)$ となり $C_{FB}(z)$ には依存しない(注 1)。ただし、本論文では $C_{FB}(z)$ が閉ループ部分を安定にするようにあらかじめ定められているものとする。このとき、2 自由度制御系が安定であるための必要十分条件は $G_2(z)P(z)^{-1}$ および $G_2(z)$ が安定かつプロパーであることである¹⁴⁾。よって、2 自由度制御系については、これらの条件を満足する $G_2(z)$ を考える。

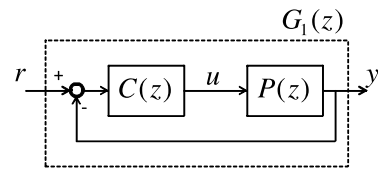


Fig. 1 One degree of freedom systems

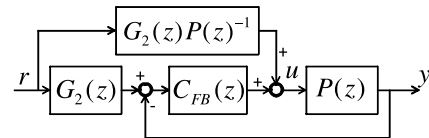


Fig. 2 Two degree of freedom systems

2.2 最適追従制御問題

追従制御問題において、参照信号は z 変換後の信号 $\hat{r}(z)$ として与えられているものとする。ここで、 $\hat{r}(z)$ は有理関数とし、その逆 z 変換 $r(k)$ の l_∞ ノルムは有界であると仮定する。すなわち、 $\hat{r}(z)$ のすべての極の大きさが 1 以下で、かつ大きさ 1 の極は重複しない。このような信号には、ステップや離散系の単位インパルス信号だけでなく、正弦波や三角波、有限時間で値をもつ任意のインパルス列、それらの線形結合などが挙げられる。

ここで、参照信号 $\hat{r}(z)$ が m_r 個の不安定零点をもつ場合にはそれらを $\eta_{m_p+1}, \dots, \eta_{m_p+m_r}$ と表記し、また $\hat{r}(z)$ の相対次数を h_r とする。 $\hat{r}(z)$ の相対次数が h_r であることは、 $r(k) = 0, \forall k < h_r$ かつ $r(h_r) \neq 0$ を意味する。また、 $\hat{r}(z)$ の不安定零点は重複しないものとし、 $P(z)$ の不安定零点とも重複しないと仮定する。すなわち、任意の $i = 1, \dots, m_p + m_r$ について $\eta_i \neq \eta_j \quad \forall i \neq j, |\eta_i| > 1$ を満たすものとする。表記の簡略化のため、制御対象と参照信号を合わせた相対次数、不安定零点の数をそれぞれ $h = h_p + h_r$, $m = m_p + m_r$ と表わす。

追従制御問題では、制御系が安定となるだけでなく、 $y(k)$

(注 1) Fig. 2 は特殊な構造に見えるが、 $u = C[r y]^T$ の制御則を利用する一般の 2 自由度系が Fig. 2 の制御系に等価変換できることが知られている¹⁴⁾。

が与えられた参照信号 $r(k)$ に漸近的に一致する, すなわち,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y(k) - r(k)) = 0 \quad (8)$$

を満足させるような制御が求められる.

そこで, まず, Fig. 1 および Fig. 2 の制御系で実現しうる $y(k)$ の集合を求める問題を考える.

[問題1] 制御対象 $P(z)$ および参照信号 $\hat{r}(z)$ が与えられたとき, 1自由度制御系, 2自由度制御系の場合について (8) 式を満足し, かつ安定な制御系によって生成されるすべての制御出力 $\hat{y}(z)$ を求めよ. ■

以下では, 問題1における出力集合を1自由度制御系, 2自由度制御系のそれぞれで $S_{1\text{-DOF}}$, $S_{2\text{-DOF}}$ と表記する. 安定化制御器の集合は従来より求められているが, この集合に属する制御器が与えられたとき, 制御出力が (8) 式を満足するとは限らない. なお, 2自由度制御系では $C_{FB}(z)$ が与えられているため, 制御出力 $\hat{y}(z)$ と制御器 $G_2(z)$ との関係は一对一の関係となっていることに注意する. よって, $S_{2\text{-DOF}}$ と $S_{1\text{-DOF}}$ に属する制御出力が与えられれば, その出力を達成する制御器はそれぞれ容易に求めることができる.

さらに, $S_{1\text{-DOF}}$, $S_{2\text{-DOF}}$ を利用することで追従性能限界に関するつぎの問題を考える.

[問題2] 制御対象 $P(z)$ および参照信号 $\hat{r}(z)$ が与えられたとき, 1自由度制御系, 2自由度制御系について, 次式の $J(P, \hat{r})$ およびそれを達成する制御器をそれぞれ求めよ.

$$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \min_{\hat{y} \in S_{1\text{-DOF}}} \|e\|_2^2 \quad (9)$$

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \min_{\hat{y} \in S_{2\text{-DOF}}} \|e\|_2^2 \quad (10)$$

ただし, $e(k) = y(k) - r(k)$ は各時刻 k での偏差である. ■

問題2における $J(P, \hat{r})$ は偏差信号の l_2 ノルムの二乗を評価関数とした場合の与えられた制御対象, 参照信号に対する最小値となっている. ある与えられた参照信号に追従させる場合, $J(P, \hat{r})$ が小さくなる制御対象のほうが過渡応答を良くできることを意味する. また, 問題1で得られる集合 $S_{1\text{-DOF}}$ および $S_{2\text{-DOF}}$ を用いて解析解としての $J(P, \hat{r})$ が求められるため, 制御対象の零点や極が追従制御時の過渡的な制御性能に与える影響をそこから見積もることができる. このような結果は, 問題2をLMIなどで数値的に解いた結果から得られるものではない.

離散時間系に対する上記の問題を考える意義としてつぎの2点が挙げられる.

1. さまざまな参照信号への追従制御問題における最適な制御器および最適値を1自由度制御系, 2自由度制御系のそれぞれに対して与えること
2. 連続時間系では最適値に影響を与えなかった制御対象の相対次数に関して, 離散時間系における結果を示すこと

1. については, 従来, 2自由度制御系では正弦波に関する結果のみであったのに対し, 正弦波, ステップだけでなく三角波, 有限時間のインパルス列およびそれらの線形結合が参照

信号として扱える. また, 1自由度制御系については従来は結果が導かれていない. 2. については離散時間系の従来結果⁷⁾⁻¹⁰⁾で制御対象の相対次数が制御性能に与える影響に関する議論がなされていない.

3. 2自由度制御系

本章では, 問題1および問題2について2自由度制御系の場合の結果を先に示す. まず, 3.1節で $S_{2\text{-DOF}}$ を導出し, 3.2節で $J_{2\text{-DOF}}$ およびそれを達成する $G_2^*(z)$ を求める.

3.1 達成可能な出力集合

ここでは, 2自由度制御系の出力集合 $S_{2\text{-DOF}}$ をパラメトライズした形で導出する. $G_2(z)P(z)^{-1}$ と $G_2(z)$, 追従に関する条件は, 偏差信号 $\hat{e}(z)$ に関するつぎの条件 (a), (b) に等価的に帰着される.

(a) $\hat{y}(z) (= \hat{r}(z) + \hat{e}(z))$ の相対次数が h 以上で, かつ次式が成り立つ.

$$\hat{r}(\eta_i) + \hat{e}(\eta_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (11)$$

(b) $\hat{e}(z)$ はプロパーかつ \mathcal{D}^C で解析的な有理関数である. すなわち, $\hat{e} \in S$ が成り立つ.

ここで, 離散時間の最終値定理を用いると (b) より (8) 式を満足すること, (a), (b) より $G_2(z) = (\hat{e}(z) + \hat{r}(z))/\hat{r}(z)$ は安定かつ相対次数 h_p 以上, 不安定零点を $\eta_1, \dots, \eta_{m_p}$ にもつため $G_2(z)P(z)^{-1}$ も安定かつプロパーとなることがそれぞれわかる. (a) および (b) の条件を満足する偏差信号 $\hat{e}(z)$ のパラメトリゼーションはつぎの補題によって特徴付けることができる.

[補題1] $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_0, \dots, \gamma_{h-1}$ は任意に与えられた \mathcal{D} 内の実数とする. このとき, 2自由度制御系において, つぎの (i) および (ii) は等価である.

(i) 以下の (i.a), (i.b) を満足する.

(i.a) $\hat{r}(z) + \hat{e}(z)$ の相対次数が h 以上で, かつ次式が成り立つ.

$$\hat{r}(\eta_i) + \hat{e}(\eta_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (12)$$

(i.b) $\hat{e} \in S$ が成り立つ.

(ii) $\hat{e} \in S_h$ が成り立つ. ただし,

$$S_h = A_h(z) + B_h(z)S \quad (13)$$

であり^(注2), $A_i(z), B_i(z), i = 1, \dots, h$ はつぎの漸化式

$$A_{i+1}(z) = A_i(z) + \kappa_i B_i(z) \quad (14)$$

$$B_{i+1}(z) = B_i(z) \frac{1}{z + \gamma_i} \quad (15)$$

$$\kappa_i = - \lim_{z \rightarrow \infty} z^i (\hat{r}(z) + A_i(z)) \quad (16)$$

で定義される関数である. ただし,

$$A_0(z) = \quad (17)$$

(注2) $A_h(z) + B_h(z)S$ は, $A_h(z) + B_h(z)Q(z)$ ($Q(z) \in S$) で表わされる有理関数の集合を表わす.

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m (z - \eta_j) \prod_{k=1}^{m-1} (\eta_i + \alpha_k)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (\eta_i - \eta_j) \prod_{k=1}^{m-1} (z + \alpha_k)} \hat{r}(\eta_i)$$

$$B_0(z) = \frac{\prod_{i=1}^m (z - \eta_i)}{\prod_{i=1}^m (z + \beta_i)} \quad (18)$$

とする．

【証明】偏差 $\hat{e} \in S$ の逆 z 変換が $k \rightarrow \infty$ で 0 に漸近すること， $\hat{r} + \hat{e} = G\hat{r}$ が P と \hat{r} の不安定零点をもつことに注意すると，連続時間系の場合¹³⁾と同様の手順で証明できる．□

補題 1 の (ii) は安定かつプロパーな有理関数 $Q \in S$ を用いて達成可能なすべての $\hat{e}(z)$ を表現している．なお， S_h は係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_0, \dots, \gamma_{h-1}$ に依存しない．このとき，補題 1 を用いて 2 自由度制御系において達成可能な出力集合はつぎの定理で与えられる．

《定理 1》2 自由度制御系において，安定な制御系で達成され，かつ (8) 式を満足する制御出力 $\hat{y}(z)$ の集合は次式で与えられる．

$$S_{2\text{-DOF}} = \hat{r} + S_h \quad (19)$$

このとき，与えられた $\hat{y} \in S_{2\text{-DOF}}$ を達成する制御器 $G_2(z)$ は次式で与えられる．

$$G_2(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{r}(z)} \quad (20)$$

(注意) 問題 2 の (10) 式は補題 1 より以下の問題を考えることと等価である．

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \min_{Q \in S} \|\hat{e}\|_2^2 \quad (21)$$

$$\hat{e}(z) = A_h(z) + B_h(z)Q(z)$$

3.2 最適解の導出

つぎに，(21) 式の $J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r})$ を導出する．いま，つぎの関数

$$M_2(z) = \prod_{j=1}^m \frac{z - \eta_j}{\bar{\eta}_j z - 1} \quad (22)$$

を考える． $M_2(z)$ はインナー関数であり， $|M(e^{j\theta})| = 1, \forall \theta$ を満足するので (21) 式は次式に置き換えることができる．

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \min_{Q \in S} \|N_2(z)(A_h(z) + B_h(z)Q(z))\|_2^2 \quad (23)$$

ただし， $N_2(z) = 1/(zM_2(z))$ であり， $1/z$ は信号を 1 ステップ遅延させる作用素である．このとき，つぎの定理によって $J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r})$ および (21) 式を満足する $Q^*(z)$ が与えられる．《定理 2》 $J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r})$ およびそれを達成する $Q^*(z)$ は次式で与えられる．

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{2\text{-DOF}} + \hat{J}_{2\text{-DOF}} \quad (24)$$

$$Q^*(z) = -\frac{W(z)}{N_2(z)B_h(z)} \quad (25)$$

ただし，

$$\tilde{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{q}_i q_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1} \quad (26)$$

$$\hat{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{k=1}^h |V_1(k) + V_2(k)|^2 \quad (27)$$

$$q_i = -\frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1) \hat{r}(\eta_i)}{\eta_i \prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)}$$

$$V_1(k) = -\frac{r(k-1)}{\prod_{i=1}^m \eta_i}$$

$$-\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} \eta_i^{k-j-2} \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} r(j)$$

$$V_2(k) = -\sum_{i=1}^m q_i \eta_i^{k-1}$$

$$W(z) = N_2(z)A_h(z) - \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{z - \eta_i}$$

$$-\sum_{k=1}^h (V_1(k) + V_2(k))z^{-k}$$

である．ただし， $h = 0$ のとき $\hat{J}_{2\text{-DOF}} = 0$ である．

【証明】付録を参照．□

連続時間系の場合には偏差信号の L_2 ノルム¹⁹⁾の下限値は求まるが最適制御器がインプロパーとなり，プロパーな制御器では最適値を達成できない場合がある¹³⁾のに対し，離散時間系の場合には最小値が求まり，(25) 式を (20) 式に代入することで次式で与えられる．

$$G_2^*(z) = \frac{\hat{r}(z) + A_h(z) + B_h(z)Q^*(z)}{\hat{r}(z)} \quad (28)$$

このように，最適値だけでなく最適な制御器も解析的に得られていることがわかる．(24) 式より最適値には η_i と $h, \hat{r}(z)$ の 3 つの要素のみが関係しているが，2 自由度制御系にはフィルタ $G_2^*(z)P(z)^{-1}$ が含まれるため，最適制御を行なうためには $P(z)$ の安定極や安定零点も関係することに注意する．

$\tilde{J}_{2\text{-DOF}}$ の値には $\hat{r}(\eta_i), \eta_i$ が影響を与えるのに対し， $\hat{J}_{2\text{-DOF}}$ では相対次数 h もその値に影響を与える． $\tilde{J}_{2\text{-DOF}}$ より， $\hat{r}(z)$ の単位円周上の極と制御対象の不安定零点 η_i が近いと $\hat{r}(\eta_i)$ が大きな値となり，過渡応答の改善が難しい制御対象，参照信号の組み合わせであることがわかる．なお，この結果は連続時間系の場合¹³⁾でも成立する． $\hat{J}_{2\text{-DOF}}$ では， $P(z)$ の相対次数が大きくなるほど (27) 式の h が大きくなるためその値が大きくなる．このとき， $\tilde{J}_{2\text{-DOF}}$ は相対次数と関係無く決まっているため $J_{2\text{-DOF}}$ は大きな値となる．このことから，制御対象の相対次数が大きくなると良い過渡応答が得られにくくなるといえる．他方， $\hat{r}(z)$ の相対次数が変化した場合は $\hat{J}_{2\text{-DOF}}$ の値が変化するが，同時に $\tilde{J}_{2\text{-DOF}}$ も変化することに注意する．

4. 1 自由度制御系

4.1 達成可能な出力集合

2 自由度制御系に対する結果を利用して 1 自由度制御系の

場合の出力信号の集合を求める．2自由度制御系との違いは内部安定性に関する部分である．ここで，離散時間系の内部安定性の条件は次式で与えられる．

$$\frac{P(z)}{1+P(z)C(z)} = P(z)(1-G_1(z)) \in \mathcal{S} \quad (29)$$

$$\frac{1}{1+P(z)C(z)} = 1-G_1(z) \in \mathcal{S} \quad (30)$$

$$\frac{C(z)}{1+P(z)C(z)} = \frac{G_1(z)}{P(z)} \in \mathcal{S} \quad (31)$$

$$\frac{P(z)C(z)}{1+P(z)C(z)} = G_1(z) \in \mathcal{S} \quad (32)$$

(31)式より，Fig.1の $G_1(z)$ は安定，かつ，相対次数は h_p 以上， $\eta_1, \dots, \eta_{m_p}$ に零点をもたなければならない．このことから，次式

$$\mathcal{S}_{1\text{-DOF}} \subseteq \mathcal{S}_{2\text{-DOF}} \quad (33)$$

が成立する．すなわち，1自由度制御系の出力集合に属するならば2自由度制御系の出力集合にも属する．もし， $G_1(z)$ が安定，かつ相対次数 h_p 以上， $\eta_1, \dots, \eta_{m_p}$ に零点をもつ場合には(30)，(31)，(32)式を満足する．さらに，もし $P(z)$ が安定な伝達関数の場合($n_p = 0$)であれば(29)式も自動的に成り立つため次式が成立する．

$$\mathcal{S}_{1\text{-DOF}} = \mathcal{S}_{2\text{-DOF}} \quad (34)$$

一方， $P(z)$ が不安定極をもつ場合には， $\mathcal{S}_{1\text{-DOF}}$ は $\mathcal{S}_{2\text{-DOF}}$ のうち，(29)式を満たす出力を集めた集合となる．このことから，以降では $P(z)$ が不安定極をもつ場合に限定して議論を行なう．

ここでは， $\hat{r}(\lambda_i) \neq 0, \forall i$ が成り立つ場合を考える．たとえば，参照信号が不安定零点をもたない場合には，任意の λ_i についてこの仮定を満足する．このとき， $\mathcal{S}_{1\text{-DOF}}$ はつぎの定理により導かれる．

《定理3》 $\rho_1, \dots, \rho_{n_p}$ は任意に与えられた \mathcal{D} 内の実数とする．このとき，1自由度制御系に対して $\mathcal{S}_{1\text{-DOF}}$ は次式で与えられる．

$$\mathcal{S}_{1\text{-DOF}} = \hat{r} + \mathcal{S}_{n_p} \quad (35)$$

$$\mathcal{S}_{n_p} = \mathcal{A}_{n_p}(z) + \mathcal{B}_{n_p}(z)\mathcal{S} \quad (36)$$

ただし， $\mathcal{A}_{n_p}(z), \mathcal{B}_{n_p}(z)$ は

$$\mathcal{A}_0(z) = A_h(z) \quad (37)$$

$$\mathcal{A}_{n+1}(z) = \mathcal{A}_n(z) - \mathcal{B}_n(z) \frac{\mathcal{A}_n(\lambda_{n+1})}{\mathcal{B}_n(\lambda_{n+1})} \quad (38)$$

$$\mathcal{B}_0(z) = B_h(z) \quad (39)$$

$$\mathcal{B}_{n+1}(z) = \mathcal{B}_n(z) \frac{z - \lambda_{n+1}}{z + \rho_{n+1}} \quad (40)$$

によって与えられる実有理関数であり， $A_h(z), B_h(z)$ は補題1で求められる．

【証明】補題1と同様，連続時間系に対する結果(文献13)の定理2)の証明と同じ手順で証明できる．証明には， $\hat{r}(\lambda_i) \neq 0$

の仮定の下で(29)式が次式と等価であることを利用する．

$$\hat{e}(\lambda_i) = G_1(\lambda_i)\hat{r}(\lambda_i) - \hat{r}(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n_p \quad (41)$$

□

定理3において，ある $\hat{y} \in \mathcal{S}_{1\text{-DOF}}$ が与えられた場合，その $\hat{y}(z)$ を達成する制御器 $C(z)$ は次式で与えられる．

$$C(z) = \frac{G_1(z)}{P(z)(1-G_1(z))} \quad (42)$$

$$G_1(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{r}(z)}$$

なお，(42)式は $C(z) = \hat{y}(z)/P(z)\hat{e}(z)$ と表わすこともでき， $\hat{y}(z)$ が $\hat{r}(z)$ と同じ単位円周上の極をもつことから内部モデル原理を満たす制御器であることがわかる．

(注意) 2自由度制御系の場合と同様に，問題2の(9)式は定理3より以下の問題を考えることと等価である．

$$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \min_{Q \in \mathcal{S}} \|\hat{e}\|_2^2 \quad (43)$$

$$\hat{e}(z) = \mathcal{A}_{n_p}(z) + \mathcal{B}_{n_p}(z)Q(z)$$

4.2 最適解の導出

つぎに，1自由度制御系の場合の最適値 $J_{1\text{-DOF}}$ および最適な制御器 $C^*(z)$ を求める．まず，2自由度制御系の場合と同様につぎのインナー関数

$$M_1(z) = \prod_{j=1}^m \frac{z - \eta_j}{\bar{\eta}_j z - 1} \prod_{k=1}^{n_p} \frac{z - \lambda_k}{\bar{\lambda}_k z - 1} \quad (44)$$

を考えると，(43)式より次式が成り立つ．

$$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \min_{Q \in \mathcal{S}} \|N_1(z)(\mathcal{A}_{n_p}(z) + \mathcal{B}_{n_p}(z)Q(z))\|_2^2 \quad (45)$$

ただし， $N_1(z) = 1/(zM_1(z))$ である．

このとき， $J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r})$ およびそれを達成する $Q^*(z)$ はつぎの定理で与えられる．

《定理4》 $J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r})$ およびそれを達成する $Q^*(z)$ は次式で与えられる．

$$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{1\text{-DOF}} + \hat{J}_{1\text{-DOF}} \quad (46)$$

$$Q^*(z) = -\frac{\mathcal{W}(z)}{N_1(z)\mathcal{B}_{n_p}(z)} \quad (47)$$

ただし，

$$\tilde{J}_{1\text{-DOF}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{\mathbf{q}}_i \mathbf{q}_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1} \quad (48)$$

$$\hat{J}_{1\text{-DOF}} = \sum_{k=1}^h |\mathcal{V}_1(k) + \mathcal{V}_2(k)|^2 \quad (49)$$

$$\mathbf{q}_i = -\frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1) \prod_{l=1}^{n_p} (\bar{\lambda}_l \eta_i - 1) \hat{r}(\eta_i)}{\eta_i \prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l) \prod_{l=1}^{n_p} (\eta_i - \lambda_l)}$$

$$\mathcal{V}_1(k) = -\frac{r(k-1)}{\prod_{i=1}^m \eta_i \prod_{i=1}^{n_p} \lambda_i} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} \eta_i^{k-j-2}$$

$$\cdot \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1) \prod_{l=1}^{n_p} (\bar{\lambda}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l) \prod_{l=1}^{n_p} (\eta_i - \lambda_l)} r(j)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{k-j-2} \\
& \cdot \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \lambda_i - 1) \prod_{l=1}^{n_p} (\bar{\lambda}_l \lambda_i - 1)}{\prod_{l=1}^m (\lambda_i - \eta_l) \prod_{l=1, l \neq i}^{n_p} (\lambda_i - \lambda_l)} r(j) \\
\mathcal{V}_2(k) &= - \sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i \eta_i^{k-1} \\
\mathcal{W}(z) &= N_1(z) \mathcal{A}_{n_p}(z) - \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{q}_i}{z - \eta_i} \\
& - \sum_{k=1}^h (\mathcal{V}_1(k) + \mathcal{V}_2(k)) z^{-k}
\end{aligned}$$

【証明】付録を参照。 \square

定理 4 の $Q^*(z)$ を用いて最適追従制御器 $C^*(z)$ は次式で与えられる。

$$C^*(z) = \frac{G_1^*(z)}{P(z)(1 - G_1^*(z))} \quad (50)$$

$$G_1^*(z) = \frac{\hat{r}(z) + \mathcal{A}_{n_p}(z) + \mathcal{B}_{n_p}(z)Q^*(z)}{\hat{r}(z)} \quad (51)$$

ここで、2 自由度制御系の場合と同様に、最適追従制御器 $C^*(z)$ が解析的に求められており、 $\hat{r}(\eta_i)$ の大きさが最適値に影響を与える。上記は制御対象が不安定極をもつ場合の結果を示しているが、安定な $P(z)$ の場合には $J_{1-DOF} = J_{2-DOF}$ となること $S_{1-DOF} = S_{2-DOF}$ からわかり、最適な制御器 $C(z)$ は (28) 式および (50) 式において $G_1^*(z)$ を $G_2^*(z)$ に置き換えた式から求まる。

5. 数値例

第 3.2, 4.2 節で得た最適値 $J(P, \hat{r})$ および最適化制御器を用いた数値例を示す。その際、正弦波などさまざまな参照信号を本枠組みで扱っていることの確認だけでなく、相対次数や不安定極、参照信号が最適な制御に与える影響について考察する。各数値例では、 $P(z)$ がそれぞれ 1 個の不安定零点 ($\eta < -1, 1 < \eta$)、不安定極 ($\lambda < -1, 1 < \lambda$) をもつものとし、(1), (2), (3), (5) では $P(z)$ の相対次数が 0 の場合を考える。1) $r(0) \neq 0$ かつ不安定零点をもたない参照信号が与えられた場合には 2 自由度制御系では $\beta = -0.1$ と選ぶと $A_0(z) = -\hat{r}(\eta)$, $B_0(z) = (z - \eta)/(z - 0.1)$ を用いて S_{2-DOF} が表わされる。さらに、 J_{2-DOF} および $Q^*(z)$ は次式で与えられる。

$$J_{2-DOF} = \frac{(\eta^2 - 1)\hat{r}(\eta)^2}{\eta^2} \quad (52)$$

$$Q^*(z) = \frac{(z - 0.1)\hat{r}(\eta)}{\eta(\eta z - 1)} \quad (53)$$

このとき、最適な制御器 $G_2^*(z)$ は $Q^*(z)$ を用いた (28) 式での計算により求められる。

つぎに 1 自由度制御系の場合を考える。ただし、 $\rho = -0.2$ とすると $\mathcal{A}_1(z) = -\hat{r}(\eta)(1 - B_0(z)/B_0(\lambda))$, $\mathcal{B}_1(z) = B_0(z)(z - \lambda)/(z - 0.2)$ を用いて S_{1-DOF} が表わされ、さらに、以下を得る。

$$J_{1-DOF} = \frac{(\eta^2 - 1)(\eta\lambda - 1)^2 \hat{r}(\eta)^2}{\eta^2(\eta - \lambda)^2} \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(z) &= -\frac{\hat{r}(\eta)}{\lambda\eta z} \left(1 - \frac{B_0(0)}{B_0(\lambda)}\right) \\
&+ N_1(0.1)\hat{r}(\eta) \frac{0.1 - \eta}{B_0(\lambda)(z - 0.1)}
\end{aligned} \quad (55)$$

$$N_1(z) = \frac{(\eta z - 1)(\lambda z - 1)}{z(z - \eta)(z - \lambda)} \quad (56)$$

最適な制御器は (55) 式から得られる $Q^*(z)$ を (50), (51) 式に代入することで求まる。ここで、両者の最適値を比較するため (52) 式と (54) 式の比を取ると、 $J_{1-DOF}/J_{2-DOF} = (\eta\lambda - 1)^2/(\eta - \lambda)^2$ となる。 $(\eta\lambda - 1)^2 - (\eta - \lambda)^2 = (\eta^2 - 1)(\lambda^2 - 1) > 0$ より、任意の η, λ に対して $J_{1-DOF} > J_{2-DOF}$ が成り立つ。すなわち、2 自由度制御系の最適値のほうが必ず小さく、この関係は参照信号の関数形に依存しない。また、 η と λ が近いとき J_{1-DOF}/J_{2-DOF} は特に大きな値となる。これらの特徴は連続系の場合とも対応している。

2) 個別の参照信号に関する数値例を示す。まず、2 自由度制御系、参照信号が $\hat{r}(z) = \sum_{k=0}^t 1/z^k$ の場合を考える。この $\hat{r}(z)$ は $t = 0$ のとき単位インパルス、 $t = \infty$ でステップとなる信号である。 $\eta > 1$ の場合には t が大きいほど $\hat{r}(\eta)$ の値が大きくなり最適値 J_{2-DOF} も大きくなる。もし、参照信号がインパルスの場合には $J_{2-DOF}(P, 1) = 1 - 1/\eta^2$ 、ステップの場合には $J_{2-DOF}(P, z/(z-1)) = (\eta+1)/(\eta-1)$ となる。この結果を横軸を η としてプロットしたものが Fig. 3 である。インパルス信号への追従 (破線) では $\eta (> 1)$ が 1 に近いほうが良い制御性能の達成が見込まれるのに対し、ステップへ追従 (実線) する場合には η が 1 に近いほど過渡応答の改善は難しい。これは、ステップ信号の場合には $\hat{r}(z) = z/(z-1)$ と表現でき、 $z = 1$ に極をもつことで $\hat{r}(\eta)$ の値が大きくなる

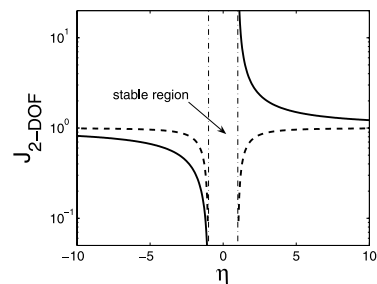


Fig. 3 J_{2-DOF} for each η

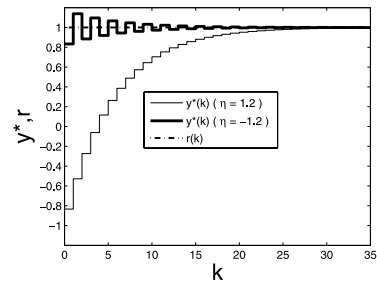


Fig. 4 $y^*(k)$ of case $\eta = -1.2$ and case $\eta = 1.2$

ことに起因する．実際， $\eta = \pm 1.2$ についてステップ目標値に最適な制御器を用いて追従させた結果 (Fig. 4, 一点鎖線: 目標値, 細線: $\eta = 1.2$, 太線: $\eta = -1.2$) では $\eta = 1.2$ (η が 1 に近い) の場合に追従偏差が大きくなっていることがわかる．

3) 2 自由度制御系と 1 自由度制御系を比較する．不安定零点を $\eta = 1.2$, 参照信号を $\hat{r}(z) = (z^2 - \cos(0.2)z)/(z^2 - 2\cos(0.2)z + 1)$ とした場合の応答を示す (Fig. 5). 太線が 2 自由度制御系の最適出力, 細線が不安定極 $\lambda = -1.5$ の場合, 破線が $\lambda = 1.5$ の場合での 1 自由度制御系の最適出力である． $\lambda = -1.5$ では $(\eta\lambda - 1)^2/(\eta - \lambda)^2 > 1$ が 1 に近い値であるため 2 自由度制御系の出力との差は少ないが, η と近い値をもつ $\lambda = 1.5$ では最適な出力であるにもかかわらず悪い応答波形となっている．実際, この場合の $J_{1\text{-DOF}}$ は $J_{2\text{-DOF}}$ の 4 倍となっていることが (52) 式と (54) 式の比較からも確認できる．

4) 以下の数値例では相対次数の影響について考える．定理 2 より, $h_p = 1$ の場合には次式が成り立つ．

$$\hat{J}_{2\text{-DOF}} = \left(-\eta r(0) + \frac{\eta^2 - 1}{\eta} \hat{r}(\eta) \right)^2 \quad (57)$$

ここで, $\hat{J}_{2\text{-DOF}}$ の計算により制御対象の相対次数による最適値の劣化の度合いを知ることができる．例として, $\eta = 1.2$, $\hat{r}(z) = (z^2 - (\cos(0.2) - \sin(0.2))z)/(z^2 - 2\cos(0.2)z + 1)$ の場合を Fig. 6 に示す．Fig. 6 において, $h_p = 1$ の場合に $y^*(0) = 0$ となっており, 波形の差はあまり無いものの $h_p = 1$ で過渡応答が悪化していることが確認できる．実際, $J_{2\text{-DOF}} = 9.992$ および $\hat{J}_{2\text{-DOF}} = 0.8043$ が得られ, 少差ではあるが $h_p = 1$ で $J_{2\text{-DOF}}$ が大きな値となる．

一方, 制御対象ではなく参照信号の相対次数について考

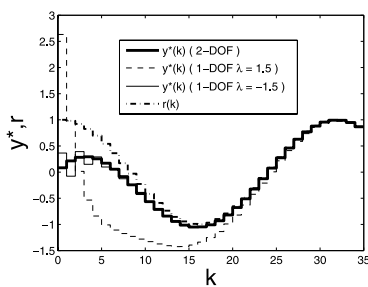


Fig. 5 $y^*(k)$ of 1-DOF and 2-DOF

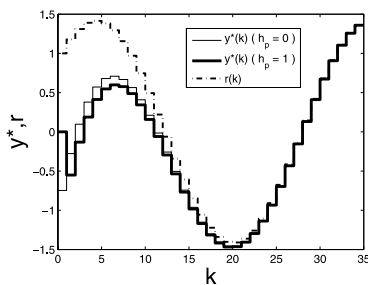


Fig. 6 Effectiveness of relative degree

Table 1 $\hat{J}_{2\text{-DOF}}$ and $\hat{J}_{2\text{-DOF}}$ for some $\hat{r}(z)$

$\hat{r}(z)$	1	$1/z$	$1/z^2$
$\hat{J}_{2\text{-DOF}}$	$1 - 1/\eta^2$	$1/\eta^2 - 1/\eta^4$	$1/\eta^4 - 1/\eta^6$
$\hat{J}_{2\text{-DOF}}$	0	$1 - 2/\eta^2 + 1/\eta^4$	$1 - 1/\eta^2 - 1/\eta^4 + 1/\eta^6$

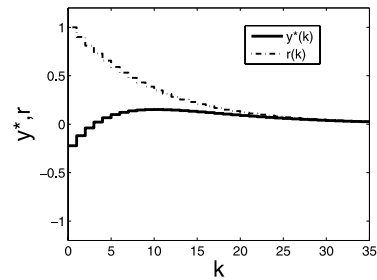


Fig. 7 Damping signal

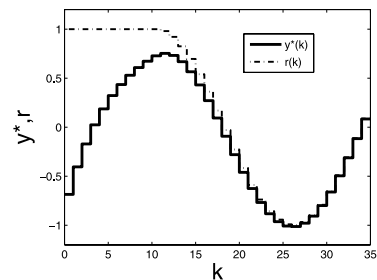


Fig. 8 Sine wave with impulse train

えるために, 2 自由度制御系で $h_p = 0$ とし参照信号が $\hat{r}(z) = 1, 1/z, 1/z^2$ とそれぞれ与えられた場合を考える．これらの信号は単位インパルス信号およびそれを 1, 2 ステップ遅らせた信号である．このとき, h の値は異なるものの追従性能限界に影響を与えないはずである．実際, Table 1 はそれぞれの参照信号に対する $\hat{J}_{2\text{-DOF}}, \hat{J}_{2\text{-DOF}}$ を示したものであるが, $J_{2\text{-DOF}}$ はすべての例で $1 - 1/\eta^2$ であり性能限界への影響がない．

5) より広い信号を扱えることを確認するためにつぎの参照信号が与えられた場合を考える．

$$\hat{r}(z) = \frac{z}{z - 0.9} \quad (58)$$

$$\hat{r}(z) = \sum_{k=0}^9 \frac{1}{z^k} + \frac{1}{z^{10}} \frac{z^2 - \cos(0.2)z}{z^2 - 2\cos(0.2)z + 1} \quad (59)$$

(58) 式は減衰する指数信号である．また, (59) 式は正弦波と有限時刻までのインパルス列との線形結合となっており, 従来の枠組みでは扱えない．ここでは, $\eta = 1.2$ とした場合の最適出力 $y^*(k)$ をそれぞれ Fig. 7, Fig. 8 に示している．ただし, 一点鎖線が $r(k)$, 実線が $y^*(k)$ である．

6. おわりに

離散時間追従制御系において, 追従偏差の l_2 ノルムの最小値およびそれを達成する制御器の解析解を導出した．本論文の結果は, l_∞ 有界かつその z 変換が有理関数で表わされるさまざまな参照信号を扱うことができ, 制御対象の相対次数の

影響も扱うことができるものである。このとき、定理 2, 定理 4 より $\hat{r}(\eta_i)$ の値が大きければ $J(P, \hat{r})$ の値が大きくなることから、 $P(z)$ の不安定零点と $\hat{r}(z)$ の極が近いと、良い過渡応答を得にくいことが解析解から明らかになった。また、制御対象が不安定極をもつ場合、1 自由度系と 2 自由度系で実現可能な応答のクラスに差があることは従来より知られていたが、本論文の結果は l_2 ノルムの最小値の意味での差を明確に示した解析解となっている。

数値例において、正弦波とインパルス列を結合した参照信号は従来の枠組みでは扱われていないものである。さまざまな参照信号を扱える利点に関してはさらに考察を行なう必要があり、たとえば、 $\hat{r}(z)$ の関数形を自由に決められることを利用するとリファレンスガバナへの応用などが考えられる。

参考文献

- 1) S. Hara: Plant/Controller Design Integration, Proceedings of Advanced Control of Industrial Processes (2008)
- 2) 原 辰次: 制御しやすいシステムの特徴付け, 制御理論シンポジウム資料, 7/12 (2003)
- 3) J. Chen, L. Qiu and O. Toker: Limitations on maximal tracking accuracy, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**-1, 45/53 (2000)
- 4) J. Chen, S. Hara and G. Chen: Best Tracking and Regulation Performance Under Control Energy Constraint, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**-8, 1320/1336 (2003)
- 5) W. Su, L. Qiu and J. Chen: Fundamental Performance Limitation in Tracking Sinusoidal Signals, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**-8, 1371/1380 (2003)
- 6) W. Su, L. Qiu and J. Chen: On Performance Limitation in Tracking a Sinusoid, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51**-8, 1320/1325 (2006)
- 7) O. Toker, J. Chen and L. Qiu: Tracking Performance Limitations in LTI Multivariable Discrete-Time Systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **49**-5, 657/670 (2002)
- 8) W. Su, L. Qiu and J. Chen: Fundamental limit of discrete-time systems in tracking multi-tone sinusoidal signals, *Automatica*, **43**-1, 15/30 (2007)
- 9) 原, Toni: 1 入力多出力線形離散時間系の H_2 制御性能限界, システム制御情報学会論文誌, **19**-10, 391/399 (2006)
- 10) 加嶋, 西尾: 離散時間系における最適 H^2 制御性能の非最小位相特性による特徴付け, 計測自動制御学会論文集, **43**-8, 656/662 (2007)
- 11) 田中, 菅野, 津村: 離散時間 H_2 性能限界の極・零点に基づく表現, 第 8 回制御部門大会資料, 055-2-1 (2008)
- 12) 岡島, 浅井: 目標信号に漸的に追従し有界な入力で達成可能な出力のパラメトリゼーション, システム制御情報学会論文誌, **20**-1, 39/49 (2007)
- 13) 岡島, 浅井: あるクラスの参照信号に対する追従性能限界の解析, 計測自動制御学会論文集, **43**-9, 812/820 (2007)
- 14) 杉江俊治: サーボ系の設計理論と H_∞ 制御性能, システム/制御/情報, **35**-2, 80/87 (1991)
- 15) 前田, 杉江: アドバンスト制御のためのシステム制御理論, システム制御情報学会編, 朝倉書店 (1990)
- 16) 金井, 堀: デジタル制御システム入門-デルタオペレータの適用-, 横書店 (1992)
- 17) 中溝, 田村, 山根, 申: デジタル制御の講義と演習, 日新出版 (1997)
- 18) 山本 裕: システムと制御の数学, システム制御情報学会編,

朝倉書店 (1998)

19) 萩原朋道: デジタル制御入門, システム制御工学シリーズ 5, コロナ社 (1999)

《付 録》

A. 定理 2 の証明

まず, $\|N_2(A_h + B_h Q)\|_2^2$ は以下のように分解できる。

$$\|N_2(A_h + B_h Q)\|_2^2 = \|(N_2 A_h)_{anst}\|_2^2 + \|(N_2 A_h)_{st} + N_2 B_h Q\|_2^2 \quad (\text{A.1})$$

ただし, $(N_2 A_h)_{anst}$ は反安定部分, $(N_2 A_h)_{st}$ は安定部分である。以下では, (A.1) 式の右辺の第 1 項が $\tilde{J}_{2\text{-DOF}}$ となり, 第 2 項の最小値が $\hat{J}_{2\text{-DOF}}$ となることを示す。

まず, (A.1) 式の第 1 項は次式で与えられる。

$$(N_2 A_h)_{anst} = (N_2 A_0)_{anst} = - \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{\eta}_j \eta_i - 1) \hat{r}(\eta_i)}{(z - \eta_i) \eta_i \prod_{j=1, j \neq i}^m (\eta_i - \eta_j)} \quad (\text{A.2})$$

ここで,

$$q_i = - \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1) \hat{r}(\eta_i)}{\eta_i \prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} \quad (\text{A.3})$$

とし, 文献 9) と同様に

$$\left\langle \frac{1}{z - \eta_i}, \frac{1}{z - \eta_j} \right\rangle = \frac{1}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1} \quad (\text{A.4})$$

の関係を利用して $\langle (N_2 A_h)_{anst}, (N_2 A_h)_{anst} \rangle$ を計算すると

$$\|(N_2 A_h)_{anst}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{q}_i q_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1} = \tilde{J}_{2\text{-DOF}} \quad (\text{A.5})$$

となり, (26) 式が得られる。

つぎに, (A.1) 式の第 2 項の最小値, すなわち次式

$$\min_{Q \in S} \|(N_2 A_h)_{st} + N_2 B_h Q\|_2^2 \quad (\text{A.6})$$

を考える。 $\hat{T}(z) := N_2(z) B_h(z)$ は安定かつ最小位相, 相対次数 $h+1$ である。そこで, $\hat{T}(z)$ を非再帰型の信号として書く

$$\hat{T}(z) = \sum_{k=h+1}^{\infty} T(k) z^{-k} \quad (\text{A.7})$$

となる。これより, $\hat{T}(z) Q(z)$ の逆 z 変換の $k=0, \dots, h$ での値は, いかなる $Q(z)$ を用いても零となる。一方, それ以外の時刻 ($k \geq h+1$) での値に関しては $Q(z)$ の選び方によって任意に定めることができる。よって, $\hat{V}(z) := (N_2(z) A_h(z))_{st}$ における $k=h$ ステップまでの値を考え, それらを二乗して足したものが第 2 項の最小値, すなわち (27) 式となることを示せる。

実際, $\hat{V}(z)$ を非再帰の信号として書くと次式で表わされる。

$$\hat{V}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} V(k) z^{-k} \quad (\text{A.8})$$

ここで求めたいものが

$$\hat{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{k=0}^h V(k)^2 \quad (\text{A.9})$$

であることを考慮して $V(k)$ を導出する．そのため、次式をまず考える．

$$\hat{V}(z) = N_2(z)(A_h(z) + \hat{r}(z)) - N_2(z)\hat{r}(z) \quad (\text{A.10}) \\ - (N_2(z)A_h(z))_{anst}$$

このとき、補題1より (A.10) 式の第1項は相対次数が $h+1$ 以上であることから h ステップまでの値は零となる．一方、第2項は $\hat{r}(z)$ を相対次数1のフィルタ $-N_2(z)$ に通した信号であるため $k=1, \dots, h$ で一般に零以外の値をもつ．また、 $(N_2(z)\hat{r}(z))_{anst}$ も $k=1, \dots, h$ で零以外の値をもつ．そこで、第2項、第3項の各時刻 $k=1, \dots, h$ での値をそれぞれ $V_1(k)$ 、 $V_2(k)$ と表記すると、 $V(k) = V_1(k) + V_2(k)$ となる．ここで、次式

$$N_2(z) = \frac{1}{z \prod_{i=1}^m \eta_i} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{z - \eta_i} \cdot \frac{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\bar{\eta}_l \eta_l - 1)}{\eta_i \prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)}$$

が成り立つことを利用すると、 $V_1(k)$ は以下で与えられる．

$$V_1(k) = - \frac{r(k-1)}{\prod_{i=1}^m \eta_i} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} \eta_i^{k-j-2} \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_l - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} r(j)$$

また、(A.2) 式より $V_2(k)$ は以下で与えられる．

$$V_2(k) = \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{\eta}_j \eta_j - 1) \hat{r}(\eta_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (\eta_i - \eta_j)} \eta_i^{k-2} \\ - \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m (\bar{\eta}_j \eta_j - 1) \hat{r}(\eta_i)}{\eta_i^2 \prod_{j=1, j \neq i}^m (\eta_i - \eta_j)} \delta(k, 0)$$

ただし、 $\delta(k, 0)$ はクロネッカーのデルタ関数であり、 $\delta(0, 0) = 1$ 、 $\delta(k, 0) = 0$ ($k=1, \dots, h$) である．よって (27) 式が成り立つ．ここで、(A.6) 式を達成する $Q^*(z)$ は次式で求まり、 $Q^*(z)$ が安定プロパーであることは明らかである．

$$Q^*(z) = - \frac{(N_2(z)A_h(z))_{st} - \sum_{k=1}^h V(k)z^{-k}}{N_2(z)B_h(z)} \quad (\text{A.11})$$

よって、(25) 式が成り立つ．

B. 定理4の証明

証明の流れは定理2と同様であるため概略を述べる．

$$\|N_1(A_{n_p} + B_{n_p}Q)\|_2^2 = \|(N_1A_{n_p})_{anst}\|_2^2 \quad (\text{B.1}) \\ + \|(N_1A_{n_p})_{st} + N_1B_{n_p}Q\|_2^2$$

と分解するとき、第1項および、第2項の最小値がそれぞれ $\tilde{J}_{1\text{-DOF}}$ 、 $\hat{J}_{1\text{-DOF}}$ となることが示される．まず、第1項について考える．(38) 式より $A_{n_p}(z)$ が λ_k 、 $k=1, \dots, n_p$ に零点をもつことから、 $N_1(z)A_{n_p}(z)$ のうち、 η_k 、 $k=1, \dots, m$ を極にもつ部分を集めたものが $(N_1A_{n_p})_{anst}$ となる．ここで、 $A_{n_p}(z)$ が次式

$$A_{n_p}(z) = A_0(z) + \sum_{i=0}^{h-1} \kappa_i B_i(z) - \sum_{i=1}^{n_p} \frac{A_i(\lambda_i)}{B_i(\lambda_i)} B_i(z)$$

で与えられ、第2、第3項が η_k 、 $k=1, \dots, m$ に零点をもつことから $N_1(z)A_0(z)$ の η_k 、 $k=1, \dots, m$ を極にもつ部分を集めればそれが $(N_1A_{n_p})_{anst}$ となる．よって、その l_2 ノルムを計算すれば $\tilde{J}_{1\text{-DOF}}$ となる．

第2項の最小値は、定理2の証明と同様に $(N_2A_{n_p})_{st}$ の第 h ステップまでの二乗和の計算で求めることができる．このとき、次式

$$(N_1(z)A_{n_p}(z))_{st} = N_1(z)(A_{n_p}(z) + \hat{r}(z)) \quad (\text{B.2}) \\ - N_1(z)\hat{r}(z) - (N_1(z)A_{n_p}(z))_{anst}$$

の右辺の第1項が相対次数 $h+1$ であるため、残りの項に関する h ステップまでの計算を行えばよい．さらに、 $(N_2A_{n_p})_{st}$ の k ステップでの値を $\mathcal{V}(k)$ とすると $Q^*(z)$ は次式で与えられる．

$$Q^*(z) = - \frac{(N_1(z)A_{n_p})_{st} - \sum_{k=1}^h \mathcal{V}(k)z^{-k}}{N_1(z)B_{n_p}(z)} \quad (\text{B.3})$$

[著者紹介]

岡島 寛 (正会員)



1980年5月23日生．2004年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了．2007年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士後期課程修了．同年熊本大学自然科学研究科助教となり現在に至る．追従制御に関する研究に従事．博士(工学)．システム制御情報学会の会員．

浅井 徹 (正会員)



1968年10月6日生．96年東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修了．同年日本学術振興会特別研究員．97年～98年カリフォルニア大学バークレー校客員研究員．99年大阪大学大学院工学研究科助手、2002年4月同研究科講師 2005年4月同研究科助教授、2007年同研究科准教授となり現在に至る．ロバスト制御の研究に従事．博士(工学)．システム制御情報学会の会員．

川路 茂 保 (正会員・フェロー)



1969年熊本大学大学院工学研究科電気工学専攻修了．同年同工学部助手、助教授を経て、88年同教授、99年大学院自然科学研究科教授、現在に至る．この間、94～95年カリフォルニア大学バークレイ校、ハーバード大学などの客員研究員．ロバスト制御理論とメカニカルシステムへの応用、インテリジェント制御系の構築、ロボティクスなどの研究に従事．工学博士．計測自動制御学会常任理事、熊本知能システム技術研究会(RIST)会長などを歴任．計測自動制御学会技術賞受賞．電気学会上級会員、日本機械学会フェロー、日本人間工学会、IEEEなどの会員．