

設計自由度を陽に含む動的量子化器

岡島 寛*・松永 信智*・川路 茂保*

Dynamic Quantizer with Explicit Degree of Freedom for Design

Hiroshi OKAJIMA*, Nobutomo MATSUNAGA* and Shigeyasu KAWAJI*

This paper is concerned with dynamic quantizer for controlling plants with discrete-valued input. l_∞ norm of error between outputs with continuous-input and with quantized-input was guaranteed by the quantizer proposed by Azuma et al. In this paper, the degree of freedom of quantizer, which also guarantees the l_∞ norm, is considered for treating the other objectives such as robustness, reduced-order controller etc. Then a design method of reduced-order quantizer is proposed by using the design parameter. The effectiveness of reduced-order quantizer is shown by numerical examples.

Key Words: discrete-valued input, dynamic quantizer, reduced-order quantizer, discrete time systems

1. はじめに

従来の制御理論の多くは制御入力連続値を取ることを前提として組み立てられてきたのに対し、近年、制御入力離散値に制限されたシステムに対する研究がなされている^{1), 2)}。例えば、オンオフ型アクチュエータで制御を行う場合³⁾や、通信容量の制約を含む制御問題⁴⁾、低分解能のD/Aコンバータで制御を行う場合などが挙げられる。そのような場合、量子化された信号に基づいた制御を行わざるを得ない。

東ら¹⁾は離散値入力型の制御対象に対する動的量子化器に関する性能解析を行い、最適な動的量子化器を導出している。具体的には、通常の入力信号を印加する場合と量子化された信号を印加する場合の出力誤差の l_∞ ノルムが最小となる意味での最適な量子化器を求めている。しかし、外乱や制御対象の不確かさに対するロバスト性などの指標も量子化器の設計に考慮すべき場合には、最悪値の保証ができることと同時に制御系設計のための自由度を持っている方が望ましい。

そこで本論文では、設計自由度を陽に含む形で動的量子化器を提案する。この動的量子化器は最適なものではないものの、連続値入力の場合と量子化入力を印加した場合の出力の差の l_∞ ノルムが保証され、その値は陽に表現される。また、提案する動的量子化器における設計自由度はスカラパラメータ γ のみであり、 $|\gamma|$ が小さければ最適なものに近づき、 $\gamma = 0$ で最適な量子化器となる。さらに、パラメータ γ の自由度を利用して低次元動的量子化器の実現法を示す。文献1)の動的量子化器は、制御対象の次数と同じ次数であるのに対し、制御対象の次数より1次低い量子化器が得られる。

記号の定義は以下のように与える。行列 $M := \{M_{ij}\}$ に対し、 $\text{abs}(M) := \{|M_{ij}|\}$ とする。ベクトル x 、行列 M 、ベクト

ル列 $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ に対し、 $\|x\|, \|M\|, \|X\|$ はそれぞれ ∞ ノルムを表すものとする。このとき、 $\|X\| := \sup_k \|x_k\|$ (ただし、 $\|x_k\|$ はベクトル x_k の ∞ ノルム)であることに注意する。

2. 問題設定

離散時間の制御対象 P が次式で与えられる場合を考える。

$$P: \begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bv(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $x \in R^n$ は状態、 $v \in R^m$ は離散値入力、 $y \in R^p$ は制御出力である。 P はその相対次数が1であり、安定かつ最小位相系であるものとする。なお、 $p = m$ を仮定する。

P を制御対象とするFig. 1のシステムが与えられた場合、 P に対して連続値入力 $u(k)$ を印加すると出力 $y_r(k)$ を得る(以降では $y_r(k)$ を理想出力と呼ぶ)。一方、実際にはアクチュエータの制約などから離散値の入力しか印加できずに量子化器 Q によって丸められた値 $v(k)$ が P に印加されるため、理想出力 $y_r(k)$ とは異なった出力 $y(k)$ を得る。この出力の差 $e(k) = y(k) - y_r(k)$ は小さい方が望ましい。

本論文では、 $u(k)$ を各時刻ごとに近い離散値に丸めた $v(k)$ を考えるのではなく、過去の入力時系列に基づいて量子化を行う動的な量子化器を考える。このような量子化器は次式で与えられるものとする。

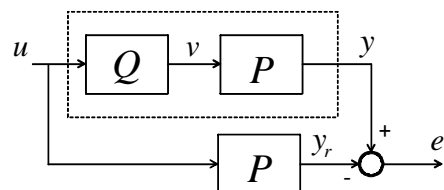


Fig. 1 error system with input quantizer

* 熊本大学自然科学研究科 熊本市黒髪 2-39-1
* Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto-City
(Received January 28, 2008)
(Revised January 1, 2006)

$$Q : \begin{cases} \xi(k+1) &= A\xi(k) + B_1u(k) + B_2v(k) \\ v(k) &= q[C\xi(k) + Du(k)] \end{cases}$$

ただし, $q[\cdot]$ は静的な量子化器であり, 文献 1) と同じものである. その量子化幅を d とする. 以下, パラメータの組 $\mathcal{K} = \{A, B_1, B_2, C, D\}$ の設計を適切に行うことで $e(k)$ の振る舞いを小さく決める. そのために以下の評価関数 $E(Q)$ を用いる.

$$E(Q) = \sup_{U \in l_\infty} \|Y - Y_r\| \quad (2)$$

ただし, U は入力ベクトル列 $U := \{u(0), u(1), \dots\}$ であり, Y は $Y := \{y(1), y(2), \dots\}$, Y_r は $Y_r := \{y_r(1), y_r(2), \dots\}$ で表されるベクトル列である. このとき, $E(Q)$ は任意の $u(k)$ に対する出力誤差 $e(k)$ の最大値を評価する. 出力誤差の最大値が小さければ, 連続値入力の制御系に対して適切な制御器さえ設計すれば, おおよそ離散値入力の場合にも似た振る舞いが期待できる.

ここで, $B_1 = -B_2$, $D = I$ の場合は次式が成り立つ¹⁾.

$$E(Q) = \left\| \text{abs}(CB) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs}(\bar{C}\bar{A}^k\bar{B}) \right\| \frac{d}{2} \quad (3)$$

ただし,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC \\ 0 & A + B_2C \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_2 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

である.

しかし, (3) は無限級数を含むため, 必ずしも与えられた \mathcal{K} に対して有限値を持つとは限らず, 有限値を持つとしても無限和の計算を要する. このことから, $E(Q)$ の値を陽に表せる, すなわち, 無限和の計算を必要としない量子化器 Q が望ましい.

3. 設計自由度を持つ動的量子化器

本章では, $E(Q)$ の値を陽に表現でき, かつ, 設計自由度を持つ動的量子化器を提案する. 次のスカラーパラメータ γ を持つ動的量子化器を考える.

$$Q_\gamma : \begin{cases} \xi(k+1) &= A\xi(k) - Bu(k) + Bv(k) \\ v(k) &= q[-(CB)^{-1}C(A + \gamma I)\xi(k) + u(k)] \end{cases}$$

ここで, Q_γ に対して \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} は

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & -B(CB)^{-1}C(A + \gamma I) \\ 0 & A - B(CB)^{-1}C(A + \gamma I) \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \\ \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

となるため, 次式が成り立つ.

$$\bar{C}\bar{A}^k\bar{B} = CB(-\gamma)^k \quad (4)$$

従って, 提案した動的量子化器 Q_γ に対する (2) の評価関数値は, (4) を (3) に代入することにより

$$E(Q_\gamma) = \left\| \text{abs}(CB) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs}(CB(-\gamma)^k) \right\| \frac{d}{2} \quad (5)$$

となる. ここで, 次式

$$\sum_{n=0}^m |\gamma|^n = \frac{1 - |\gamma|^{m+1}}{1 - |\gamma|} \quad (6)$$

の両辺の極限 $m \rightarrow \infty$ を利用すると, $|\gamma| < 1$ の下で (5) は次式で与えられる.

$$E(Q_\gamma) = \|\text{abs}(CB)\| \frac{d}{2(1 - |\gamma|)} \quad (7)$$

すなわち, 評価関数値 $E(Q_\gamma)$ は制御対象のパラメータと量子化幅 d , 設計自由度 γ で表される. 量子化器を Q_γ の構造で与えたことで, 無限級数を含まない形で $E(Q_\gamma)$ が表現されている. このとき, γ の大きさと $E(Q_\gamma)$ の大きさが単調関係となっており, 仕様を満足するうち最小の γ を見つける問題として, 量子化器の設計問題を考えることができる. ここで, 特に $\gamma = 0$ のときには文献 1) の最適動的量子化器となることに注意する.

設計自由度 γ は, $|\gamma| < 1$ で, かつ制御系が安定となる範囲内から選ばなければならない. 系の安定性は $A - B(CB)^{-1}C(A + \gamma I)$ が安定行列か否かで決まる¹⁾. ここで, $B(CB)^{-1}C$ の固有値を $\hat{\lambda}_i$ とし, $A - B(CB)^{-1}CA$ の固有値を $\tilde{\lambda}_i$ とすると次式を満足する γ について $A - B(CB)^{-1}C(A + \gamma I)$ が安定行列となる.

$$\max_i |\tilde{\lambda}_i| + |\gamma| \max_i |\hat{\lambda}_i| < 1 \quad (8)$$

さらに, 文献 2) の定理 1 より, $A - B(CB)^{-1}CA$ の固有値 $\tilde{\lambda}_i$ は $zP(z)$ の零点で与えられる. 従って, $P(z)$ の零点のうち絶対値が最大のものを $\eta_{p \max}$ (最小位相系なので $|\eta_{p \max}| < 1$) とおくと, 次式を満たす γ について制御系が安定となる.

$$|\gamma| < \frac{1 - |\eta_{p \max}|}{\max_i |\hat{\lambda}_i|} \quad (9)$$

4. 動的量子化器の低次元化

次に, パラメータ γ の自由度を利用する応用例として, $P(z)$ の次数より 1 次低くなる動的量子化器が構成できることを示す. ただし, 簡単のため, 制御対象は 1 入力 1 出力系でその極は全て異なり $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする. ここでは, $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ となるように並べているものとする.

$P(z)$ を対角正準形式で表した場合, 前節の量子化器の $C = -(CB)^{-1}C(A + \gamma I)$ において $\gamma = -\lambda_n$ とすると, $C = [* , 0]$ と表される. そこで, 観測性行列のランクが $n - 1$ となるため, その最小実現を行った量子化器 Q_γ は次数が 1 小さなものとなる. もし, λ_n の絶対値が小さければ γ が小さくできるため次数が低くかつ最適動的量子化器と同程度の性能を持つ量子化器が実現できる.

5. 数値例

5.1 動的量子化器の低次元化

ここでは, 設計自由度 γ を量子化器の低次元化に利用した

場合の数値例を示す．制御対象が次式で与えられたとする．

$$P(z) = \frac{(z-0.1)}{(z-0.3)(z-0.2)} \quad (10)$$

伝達関数 $P(z)$ を状態空間で表わすと

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．ここで, $\gamma = -\lambda_n = -0.2$ と選ぶと $C = [-0.2 \ 0]$ となる．このとき, A, B, C で与えられる量子化器の可観測性行列のランクは 1 となり, 最小実現を行うことで量子化器 $Q_{-0.2}$ は次式で与えられる．

$$Q_{-0.2} : \begin{cases} \xi(k+1) &= 0.3\xi(k) - u(k) + v(k) \\ v(k) &= q[-0.2\xi(k) + u(k)] \end{cases}$$

ただし, q の量子化幅 d は 1 とした．このとき, $P(z)$ の次数は 2 であるのに対し $Q_{-0.2}$ の次数は 1 である．

ここで, $\gamma = -0.2$ であるので $E(Q_{-0.2}) = 0.625$ となる．このとき, $u(k) = \sin(0.2k) + 2\sin(0.1k) + 0.5$ を印加した結果を Figs. 2,3,4 に示す．Fig. 2 および Fig. 3 はそれぞれ入力 $v(k)$, $u(k)$ および出力 $y(k)$, $y_r(k)$ を表している．Fig. 2 において太線が提案手法の $v(k)$, 細線にアスタリスクが静的な量子化器の $v(k)$, 細線が $u(k)$ を表している．また, Fig. 3 において太線が提案手法の $y(k)$, 細線とアスタリスクが静的な量子化器を通した $y(k)$, 細線が $y_r(k)$ を表している．さらに, Fig. 4 は出力誤差 $e(k)$ を示す．このとき, 一部の離散時刻 k で $v(k)$ が重なっているが, 異なった離散値入力となっていることがわかる．また, Fig. 4 において, 最適動的量子化器で保証する $E(Q_{opt}) = 0.5$ (Fig. 4, 点線) よりも大きな出力誤差となっているものの, 提案法で保証する $E(Q_{-0.2}) = 0.625$

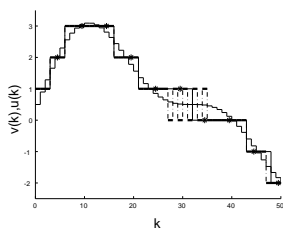


Fig. 2 $u(k)$ and each $v(k)$

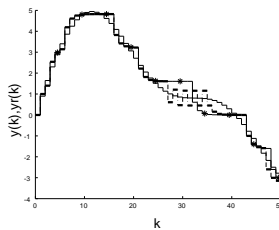


Fig. 3 $y_r(k)$ and each $y(k)$

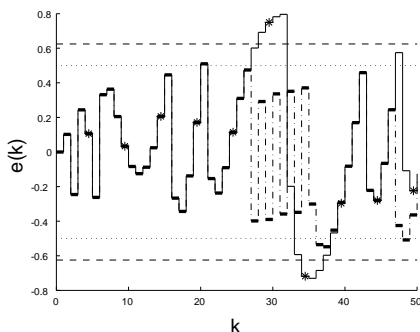


Fig. 4 errors from $y_r(k)$ to $y(k)$

(破線)よりは小さな出力誤差となっていることがわかる．なお, $\gamma = 0$ とすると $e(k)$ の最大値が 0.5 未満となることは確認したが, 図が煩雑になるため省略した．

5.2 静的量子化器による保証

特に制御対象が一次系の場合, 静的な量子化器で偏差の l_∞ ノルムを保証できる．例えば, 制御対象として $P(z) = 1/(z-0.2)$ が与えられた場合を考える． $P(z)$ を状態空間で表現すると

$$P: \begin{cases} x(k+1) &= 0.2x(k) + v(k) \\ y(k) &= x(k) \end{cases}$$

となる．このとき, $\gamma = -0.2$ とすると $C = 0$ となることから, $Q_{-0.2}$ は静的な量子化器となっている．一方, (7) より $E(Q_{-0.2}) = 0.625$ であり, 静的量子化器によって偏差の l_∞ ノルムが保証されている．実際, 5.1 節と同じ $u(k)$ に対して静的量子化器を用いた場合 (Fig. 5) には, 偏差 $e(k)$ が ± 0.625 に収まっていることが確認できる．

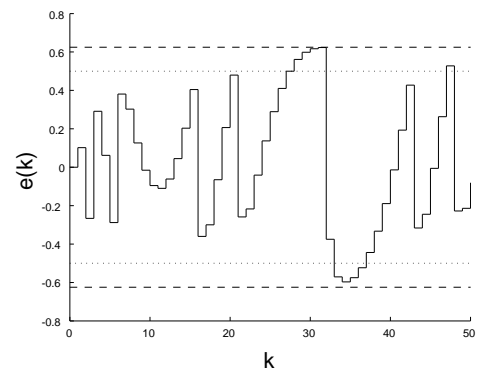


Fig. 5 error signal $e(k)$ of static quantizer

6. おわりに

本論文では, 離散値入力型制御において理想出力と出力との誤差の l_∞ ノルムを保証するような設計自由度を持つ量子化器の設計法を提案し, その応用としてスカラーパラメータ γ を適切に選ぶと低次の量子化器でも誤差の l_∞ ノルムを保証することができることを示した．

ここでは, γ を量子化器の次数を減らすために用いたが, 任意の $|\gamma| < |\gamma_{\max}|$ に対し $E(Q_\gamma) < E(Q_{\gamma_{\max}})$ で抑えられることから, 本論文の結果はロバスト性の考察への足がかりとなることが期待される．

参考文献

- 1) 東, 杉江: 離散値入力型制御における最適動的量子化器, システム制御情報学会論文集, 20-3, 122/129(2007)
- 2) 東, 杉江: 離散値入力型制御のための最適動的量子化器の安定性, 計測自動制御学会論文集, 43-12, 1136/1143(2007)
- 3) 山田, 末松, 武藤, 劉: 高速オンオフ電磁弁を用いた油圧アクティブサスペンションの PWM 制御, 日本機械学会論文集 C 編, 64-10, 3847/3853(1998)
- 4) 石井 秀明: ネットワークを介した制御: 帯域制限と量子化, システム/制御/情報, 48-8, 303/308(2004)