

## 論文要旨

本論文では、非最小位相系に対する追従制御方策について考える。従来より、非最小位相系は参照信号への追従において過渡応答の改善が難しい制御対象として知られており、偏差信号の  $L_2$  ノルムは一般に非零となる。一方、参照信号が制御対象と同じ不安定零点を持つ場合には、偏差の  $L_2$  ノルムの下限値は零となる。従来の制御問題では、与えられた時刻から制御入力の印加を行うことを想定しているのに対し、本論文では、その与えられた時刻からではなく、参照信号が不安定零点を持つ時刻から制御する手法について考える。このとき、適切に時刻を選ぶと、その時刻から先の参照信号のラプラス変換は不安定零点を持つため、結果的に得られる過渡特性を良くすることが期待できる。本論文では、非最小位相系に対する追従問題において、制御入力の印加時刻を決定する制御方策について述べる。さらに、数値例によりその有効性を検証する。

# 入力印加時刻を陽に考慮した非最小位相系の制御方策\*

岡島 寛<sup>†</sup>・浅井 徹<sup>‡</sup>

## Control Method for Non-Minimum Phase Systems Based on Choice of Time to Start Control\*

Hiroshi OKAJIMA<sup>†</sup> and Toru ASAI<sup>‡</sup>

### 1. はじめに

制御対象が最小位相系の場合、出力信号と参照信号との誤差信号を限りなく小さくするような制御入力を設計することができる。このような制御は完全制御 [1] と呼ばれている。これは、任意の正の値  $\gamma$  に対し、誤差信号  $e(t)$  の  $L_2$  ノルムを  $\gamma$  以下とする入力が存在することを意味する。

それに対し、制御対象が非最小位相系の場合、達成しうる過渡特性に限界があり、特別な場合を除いて、偏差信号の  $L_2$  ノルムを零とできないことが知られている。偏差の  $L_2$  ノルムの下限値が零となるのは、参照信号が制御対象の持つ零点と同じ零点を持つ場合のみである [3]。

従来多くの制御では、ある与えられた時刻から先に入力を印加することが前提とされているのに対し、本論文はある時刻以降で適切な時刻から制御することを考える。例えば、「なわとび」を行う場合、その成否はジャンプをする時刻によって決まるが、同様に非最小位相系の追従制御においても制御開始の時刻が重要と考えられる。

本論文では、制御対象を1個の実不安定零点を持つものに限定し、入力印加時刻を適切に選ぶことで参照信号に見かけ上の不安定零点を持たせ、任意に小さな偏差を達成することを考える。

これによって、印加時刻が変更されたことによる遅れを考えなければ、任意に誤差を小さくすることができる。この意味で完全制御に準ずる制御であると考えられる。また、有限の時間で誤差を零(に近い値)とする制御の意味では、有限整定制御 [6-8] に似た枠組みを与える。

本論文で用いる記号は標準的なものである。信号  $u(t)$  のラプラス変換を  $\hat{u}(s)$  と書く。 $S_b$  はラプラス変換が有理関数で表され、かつ  $L_\infty$  有界となるような信号の集合

\* 原稿受付 2007年3月14日

<sup>†</sup> 熊本大学自然科学研究科 Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University

<sup>‡</sup> 大阪大学 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University

Key Words: Non-minimum phase systems, Tracking control, Starting time of control

である。

### 2. 問題設定および制御手法

安定かつプロパーで不安定零点を1個持つ SISO の制御対象  $G(s)$  が以下のように与えられたとする。

$$G(s) = \frac{(s-z)l(s)}{h(s)} \tag{1}$$

ただし、 $l(s)$ 、 $h(s)$  はフルビッツ多項式である。本論文では、Fig. 1 の出力  $\hat{y}(s)$  が与えられた参照信号  $\hat{r}(s)$  に追従するようなフィードフォワード入力  $\hat{u}(s)$  の設計を考える。

(1) 式の  $G(s)$  は不安定零点を持つため、以下のモデルマッチング問題

$$J^{opt} = \inf_{\hat{u}} \|G\hat{u} - \hat{r}\|_2^2 = \inf_{\hat{u}} \|\hat{e}\|_2^2 \tag{2}$$

において  $J^{opt} = 0$  となるとは限らない。ただし、

$$\hat{e}(s) = G(s)\hat{u}(s) - \hat{r}(s) \tag{3}$$

は偏差である。しかしながら、 $\hat{r}(s)$  が  $z$  に不安定零点を持つ場合には  $J^{opt} = 0$  が成り立つ [3]。

$J^{opt} = 0$  を考えるために以下の信号のクラスを考える。

$$S_z = \left\{ \hat{r}(s) : \frac{(s+z)}{(s-z)} \hat{r}(s) \in S_b \right\} \tag{4}$$

さらに、 $\hat{r} \in S_z$  に対して  $\hat{r}_{MP} \in S_b$  を以下のように定義する。

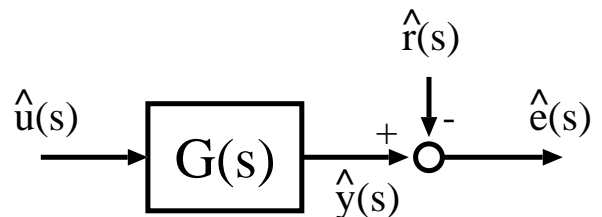


Fig. 1 Feed forward control systems

$$\hat{r}_{MP}(s) := \frac{(s+z)}{(s-z)} \hat{r}(s) \quad (5)$$

このとき、(1) 式の  $G(s)$  および  $\hat{r} \in \mathcal{S}_z$  に対し次の補題が成り立つ。

【補題 1】 安定な  $G(s)$  が有理関数として与えられていると仮定し、 $G(s)$  の不安定零点を  $z$  とする。また、 $\hat{r} \in \mathcal{S}_z$  が与えられているとする。さらに、 $\hat{r}/G \in \mathcal{S}_b$  と仮定する。ここで、

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{r}(s)}{G(s)} \quad (6)$$

とすると、 $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  となる。このとき、次式が成り立つ。

$$\hat{e}(s) = G(s)\hat{u}(s) - \hat{r}(s) = 0 \quad (7)$$

補題 1 は、 $\hat{r} \in \mathcal{S}_z$  ならば  $\hat{e}(s) = 0$  となる厳密にプロパーな入力  $\hat{u}(s)$  が存在することを意味する。

次に、(6) 式の  $\hat{u}(s)$  の相対次数が 0 以下の場合について考える。ここで、(3) 式を変形すると次式が得られる。

$$\hat{e}(s) = \frac{(s-z)}{(s+z)} \left( \tilde{G}(s)\hat{u}(s) - \hat{r}_{MP}(s) \right) \quad (8)$$

ただし、

$$\tilde{G}(s) = \frac{(s+z)}{(s-z)} G(s) \quad (9)$$

である。さらに、 $|(j\omega - z)/(j\omega + z)| = 1, \forall \omega$  より次式が成り立つ。

$$\gamma = \|\hat{e}\|_2 = \|\tilde{G}\hat{u} - \hat{r}_{MP}\|_2 \quad (10)$$

このとき、 $\tilde{G}(s)$  は最小位相特性を持つ有理関数であるため、任意の  $\gamma$  に対して (10) 式を満足する  $\hat{u}(s)$  は存在し、LMI などによって求めることができる。このことから、(6) 式の  $\hat{u}(s)$  が厳密にプロパーとならない場合でも、偏差の  $L_2$  ノルムを零とは出来ないが、限りなく小さくなるような、厳密にプロパーな制御入力  $\hat{u}(s)$  を設計することができる。

### 3. 不安定零点を持つ参照信号

$\hat{r} \in \mathcal{S}_z$  ならば、最小位相系の場合と同様に任意に小さな偏差での追従が可能であることを示した。しかしながら、一般に、与えられた  $\hat{r}(s)$  が (4) 式に属しているとは限らない。本節では、制御開始時刻を変えた場合の  $r(t)$  のラプラス変換について考える。

Fig. 2 において、 $t \geq 0$  で定義される信号  $r(t)$  を考える。ここで、 $t = t_s > 0$  を制御開始時刻とし、その時刻を改めて時刻 0 として  $r(t)$  を見たときの信号を  $r_s(t)$  とすると、 $r_s(t)$  は次式で与えられる。

$$r_s(t) = r(t+t_s) \quad t > 0 \quad (11)$$

このとき、 $\hat{r}(s)$  が厳密にプロパーな有理関数ならば、部

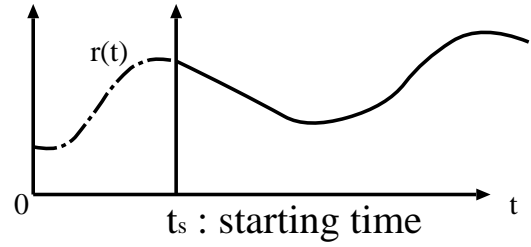


Fig. 2 Starting time of control

分分数展開により、 $\hat{r}_s(s)$  も有理関数となることを示すことができる。ここで、 $\hat{r}_s(s)$  は  $\hat{r}(s)$  とは異なる有理関数となる。このことを利用して、以降では、制御開始時刻  $t_s$  を変えることで  $\hat{r}_s \in \mathcal{S}_z$  となる  $\hat{r}_s(s)$  を見つける、すなわち、 $\hat{r}_s(s)$  が制御対象の不安定零点と同じ零点をもつような  $t_s$  を見つける問題を考える。

本論文では、特に  $r(t)$  には、ある  $N (< \infty)$  までのフーリエ級数展開によって

$$r(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (12)$$

と表すことができる周期信号を考える。

このとき、次の定理が成り立つ。

【定理 1】 (12) 式で与えられた  $r(t)$  と与えられた  $z > 0$  に対し、 $\hat{r}_s(z) = 0$  となるような  $t_s \in [0, 2\pi/\omega_0]$  が存在する。

(証明) (12) 式の  $r(t)$  に対して、 $r_s(t)$  は次のように表される。

$$r_s(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega_0(t+t_s)) + b_n \sin(n\omega_0(t+t_s)) \quad (13)$$

よって、そのラプラス変換は次のように表される。

$$\hat{r}_s(s) = \sum_{n=1}^N \tilde{a}_n(s) \cos(n\omega_0 t_s) + \tilde{b}_n(s) \sin(n\omega_0 t_s) \quad (14)$$

ただし、係数  $\tilde{a}_n(s)$ 、 $\tilde{b}_n(s)$  はそれぞれ

$$\tilde{a}_n(s) = \frac{a_n s}{s^2 + n^2 \omega_0^2} - \frac{b_n n \omega_0}{s^2 + n^2 \omega_0^2} \quad (15)$$

$$\tilde{b}_n(s) = \frac{a_n n \omega_0}{s^2 + n^2 \omega_0^2} + \frac{b_n s}{s^2 + n^2 \omega_0^2} \quad (16)$$

である。このとき、 $\hat{r}_s(z) = 0$  となる  $t_s$  が存在することを示せばよい。 $\hat{r}_s(z)$  は  $t_s$  に関して周期  $2\pi/\omega_0$  の周期関数であり、なおかつ、 $\hat{r}_s(z)$  は  $t_s$  に関するフーリエ級数展開である。そのため、次式が成り立つ。

$$\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \hat{r}_s(z) dt_s = 0 \quad (17)$$

ここで、 $\hat{r}_s(z) \equiv 0$  のとき任意の  $t_s$  について  $\hat{r}_s(s)$  は零点

$z$  を持つ．一方、 $\hat{r}_s(z) \neq 0$  のとき、 $[-\pi/\omega_0, \pi/\omega_0]$  の区間内に  $\hat{r}_s(z) > 0$  となる  $t_s$  と  $\hat{r}_s(z) < 0$  となる  $t_s$  が存在する． $\hat{r}_s(z)$  は明らかに  $t_s$  に関して連続関数であるので  $\hat{r}_s(z) = 0$  となる  $t_s$  が存在する． □

定理1より、 $r(t)$  が(12)式で与えられる信号ならば任意に与えられた不安定零点  $z$  を持つ  $\hat{r}_s(s)$  が存在することがわかる．このとき定理からわかることは時刻  $t_s$  の存在性のみであるが、正確にその時刻  $t_s$  を見積もることができれば、補題1の結果を用いることができ、その時刻から前節の制御手法による制御を行うことで、それ以後の偏差を0、もしくは任意に小さくすることができる．

#### 4. 数値例

ここでは、 $r(t) = \cos(t)$  の場合を考える． $r(t) = \cos(t)$  はもちろん、定理1の参照信号に関する仮定を満足する．

(11)式より、 $r(t) = \cos(t)$  の  $t_s$  秒後から始まる信号は次式で与えられる．

$$r_s(t) = \cos(t+t_s) : t > 0 \quad (18)$$

さらに、そのラプラス変換は次式で与えられる．

$$\mathcal{L}[\cos(t+t_s)] = \frac{\cos(t_s)s - \sin(t_s)}{s^2+1} \quad (19)$$

このとき、任意に与えられた実数  $z_1$  に対し、(19)式の有理関数が  $z_1$  に零点を持つような  $t_s$  は次式で与えられる．

$$t_s = \tan^{-1}(z_1) \quad (20)$$

例えば、 $z_1 = 1$  ならば  $t_s = \pi/4$  秒となり、(19)式は  $s = 1$  に零点を持つ．

$G(s)$  が  $s = 1$  に零点を持つ場合について、 $\cos(t)$  を参照入力とし、入力印加時刻を  $t = \pi/4$  とした制御の結果を Fig. 3 に示す(実線)．具体的には、[4] で与えられる以下のモデルマッチング問題

$$J = \min_Q \delta \|\hat{e}\|_2^2 + (1-\delta) \|\hat{u} - \hat{u}_\infty\|_2^2 \quad (21)$$

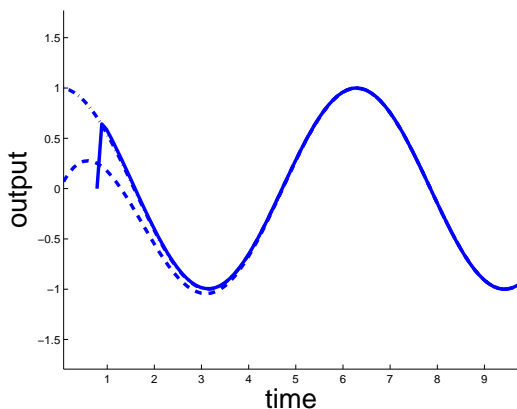


Fig. 3 Tracking to  $\cos(t)$

において、重み  $\delta$  を大きな値として  $\hat{u}(s)$  を求めた結果である．ただし、 $\hat{u}_\infty(s)$  は入力の定常信号である．比較対象として、初期時刻  $t=0$  からの偏差  $e(t)$  の  $L_2$  ノルムが最小となるように入力を印加した場合(点線)も示している．また、一点鎖線は  $r(t) = \cos(t)$  である．

提案手法の場合、 $t = \pi/4$  以降で、偏差が0に限りなく近い値となっている．そのため、 $t=0$  からの偏差  $L_2$  ノルムは提案手法の方が大きな値である一方で、整定までの時間は提案手法の方が点線の場合に比べて短いことがわかる．また、明らかに入力印加時刻は参照信号の1周期以内に存在していることがわかる．

#### 5. まとめ

本論文では、非最小位相系の制御対象に対して、限定されたクラスに属する参照信号に対する追従制御手法について述べた．さらに、周期的な参照信号を考えた場合、適切な時刻からの信号を考えることで、限定されたクラスに属する信号とみなすことができ、1周期内で適切な入力印加時刻を選べばそれ以後の偏差を任意に小さくする制御が可能であることを示した．

#### 参考文献

- [1] 木村, 杉山: 完全制御と完全観測を用いたロバスト制御系の設計法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 18, no. 10, pp. 955-960 (1982)
- [2] J. Chen, L. Qiu and O. Toker: Limitations on maximal tracking accuracy; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 45-53 (2000)
- [3] 岡島, 浅井: あるクラスの参照信号に対する追従性能限界の解析; 計測自動制御学会, 第7回制御部門大会資料 (2007)
- [4] 岡島, 浅井: 目標信号に漸近的に追従し有界な入力で達成可能な出力のパラメトリゼーション; システム制御情報学会論文集, Vol. 20, No. 1, pp. 39-49 (2007)
- [5] 吉川, 杉江: 高周波遮断逆システムとそのサーボ系への応用; 計測自動制御学会論文集, Vol. 18, No. 8, pp. 792-799(1982)
- [6] 安藤: ボジカスト制御の一般化; システムと制御, vol. 25, no. 6, pp. 358-363(1981)
- [7] 黒沢: コンティニューアステッドピートコントロールの設計; 計測自動制御学会論文集, vol. 28, no. 6, pp. 680-689(1992)
- [8] 延山, 新, 北森: 連続時間系における有限整定サーボ系の設計; 計測自動制御学会論文集, vol. 28, no. 10, pp. 1201-1208(1992)