

あるクラスの参照信号に対する追従性能限界の解析

岡島 寛*・浅井 徹**

Performance Limitation of Tracking Control Problem for a Class of References

Hiroshi OKAJIMA* and Toru ASAI**

This paper considers optimal tracking control problems. Our primary objective is to derive analytical solutions of fundamental limitations for a class of references in tracking control problem. It is well known that L_2 norm of an error, which is defined by difference between an output and a reference, doesn't go to zero when we consider transient response for non-minimum phase systems. In the existing results, fundamental limitation is derived for each reference signal such as the step reference. In these results, we need consider whether the plant is easy to control or not in each reference. On the other hands, fundamental limitations are derived as functionals of references in this paper. In other words, we derive analytical performance limitation for a class of references. As a result, we can expect to separate contribution of references and that of plants in performance limitations.

Key Words: Performance Limitations, Reference Tracking, L_2 Optimal Control, Achievable sets of outputs, Non-minimum phase systems

1. はじめに

近年、制御しやすいシステムの特徴付け¹⁾に関する研究がさかんに行われている。従来の多くの制御理論では、与えられた制御対象に対して制御器をどのように設計するかに着目している。これに対し、制御しやすいシステムを特徴付ける研究では、制御対象とその制御対象で達成可能な制御性能との関係に着目している。このような研究に対する結果から、制御対象の設計に”制御しやすさ”に関する設計仕様を組み込むことが期待でき、制御対象設計の観点から最終的な制御性能の向上を目指すための有力なアプローチとなり得る。

制御しやすいシステムの特徴付けに関する研究として、制御性能限界に関する研究^{2)~8)}がある。これらの研究では、制御対象のパラメータ(不安定極や不安定零点など)を用いて、最適制御問題(主に最適 H_2 制御問題)の最適値を陽に表現している。最適値を求めることは、ある制御対象が与えられた場合、その制御対象で達成可能な制御性能の限界を見積もることを意味する。最適値を求めることのみが目的である場合は、LMI などを用いて数値的に求めることが考えられるが、これらの研究では、最適値を制御対象のパラメータの関数と

して表すことを考える。このような表現の目的は、制御対象のどのような性質が達成可能な制御性能にインパクトを与えるかを明らかにする点にある。ここでは特に、与えられた参照信号に制御対象の出力を追従させる追従制御問題を考え、過渡応答に関する制御性能限界を陽に求める。

追従性能限界に関しては、様々な結果が導かれている^{2)~5)}。参照信号がステップ信号で与えられる連続時間系の場合には、2自由度系, 1自由度系に対して性能限界が導出されている²⁾。また、追従偏差だけでなく、制御入力の大きさも同時に評価関数に用いた解析的な結果も示されている³⁾。一方、2自由度系の制御においては、参照信号が三角関数で与えられる場合についても追従偏差について下限値の解析解が導出されている^{4), 5)}。

これら従来の結果は、個別の参照信号に対してそれぞれ求められていたものである。それに対し本論文では、参照信号を統一的に扱い、追従偏差の下限値を求めることを考える。具体的には、制御対象と参照信号のラプラス変換が与えられた場合に対し、下限を与える汎関数を陽に求めることが本論文の目的である。このような参照信号にはステップやサイン、それらの和などが含まれる。本来、追従しやすさを考える場合には、制御対象の特性だけでなく、参照信号が追従しやすい信号か否かを考えることがより有効である。本論文の結果を用いることで、参照信号による追従性能への寄与と制御対象の制御しやすさに起因する追従性能の部分が分離される。このとき、どのような参照信号は追従させやすいかわかるため、参照信号を可能な範囲で追従させやすいものに変更するという方針が可能となる。また、別の効果として、制御対

* 熊本大学自然科学研究科情報電気電子工学専攻 熊本市黒髪 2-39-1

** 大阪大学工学研究科機械工学専攻 吹田市山田丘 2-1

* Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto-City

** Graduate School of Engineering, Osaka University, Osaka University, Yamadaoka, Suita-City

(Revised February 15, 2007)

象の追従性能への寄与部分を考慮することで、様々な参照信号に対して追従させやすい制御対象の設計が期待できる。

さらに本論文では、2自由度制御系、単位フィードバック系、入力信号を直接設計する場合⁹⁾の3つの制御系に対してそれぞれ下限値を求めることで、制御系の違いによる下限値の違いについても考察する。

このような導出には従来とは異なる手順を踏む。従来、偏差の H_2 ノルムの最小化問題を考え、そこから直接的に下限値を導出していたのに対し、本論文では、まず、制御系が安定となりかつ追従を達成する出力信号の集合をパラメトライズし、得られた出力パラメトライズに基づいて偏差の2ノルムに関する最小化問題を考えることで下限値の導出を行う。

この結果は、著者らの結果⁹⁾の拡張となっている。具体的には、文献9)では、安定な制御対象が与えられた場合に対し、フィードフォワード入力によって追従が可能な出力信号の集合をパラメトライズし、出力集合内で偏差の2ノルムの意味で最適な出力信号を導出している。それに対し、本論文では、不安定な制御対象も含む制御対象が与えられた場合に対して、2自由度制御系、単位フィードバック系に対して出力集合のパラメトライズし、最適出力の導出を行う。さらに、得られた最適出力を用いた計算により下限値を導出する。

本論文で用いる記号は標準的なものである。信号 $u(t)$ のラプラス変換を $\hat{u}(s)$ と書く。集合 L_∞ は以下の信号空間である。

$$L_\infty = \{u(t) : \sup_t |u(t)| < \infty\}$$

$\|u\|_2$ は $\hat{u}(j\omega)$ の L_2 ノルム

$$\|u\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(-j\omega)\hat{u}(j\omega)d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

である。 S はプロパーかつ閉右半平面で解析的な有理関数の集合である。本論文では、上記の3つの制御系を考える。2自由度制御系、単位フィードバック系、入力を直接設計する場合について、必要に応じて添字 2-DOF, 1-DOF, BI を用いて区別する。

2. 問題設定

1入力1出力の制御対象の伝達関数が

$$P(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (1)$$

と与えられている場合を考える。このとき、 $y(t)$ を制御出力、 $u(t)$ を制御入力とすると、

$$\hat{y}(s) = P(s)\hat{u}(s) \quad (2)$$

が成り立つ。本論文では、 $P(s)$ は m_z 個の不安定零点 z_1, \dots, z_{m_z} を持ち、かつ m_p 個の不安定極 p_1, \dots, p_{m_p} を持つものとする。ただし、本論文では z_i は全て異なり、さらにその実部は全て正であるものとする。 p_k についても同様に考える。すなわち、

$$z_i \neq z_j \quad \forall i \neq j, \quad \text{Re}(z_i) > 0 \quad \forall i \quad (3)$$

$$p_k \neq p_l \quad \forall k \neq l, \quad \text{Re}(p_k) > 0 \quad \forall k \quad (4)$$

である。また、制御対象の相対次数を $n - m = m_r > 0$ とする。このような場合、 $P(s)$ は以下のように表すこともできる。

$$P(s) = \frac{h_P(s) \prod (s - z_i)}{l_P(s) \prod (s - p_k)} \quad (5)$$

ただし、 $h_P(s)$ 、 $l_P(s)$ はそれぞれ $m - m_z$ 、 $n - m_p$ 次のフルビッツ多項式である。

目標値追従を考えると、 $y(t)$ が与えられた参照信号 $r(t)$ に漸近的に一致するような $u(t)$ もしくは $\hat{u}(s)$ を生成する制御器を求める必要がある。本論文では、2自由度制御系、単位フィードバック系(1自由度制御系)、入力を直接設計する場合のそれぞれについて、 $r(t)$ に漸近する、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r_f(t) - r(t)) = 0 \quad (6)$$

を満足する出力 $y(t) = r_f(t)$ を考える。

Fig. 1 は2自由度制御系の表現の一つである。このとき、与えられた $G_{M2}(s)$ 、 $C_{FB}(s)$ に対し、 \hat{r} から \hat{r}_f までの伝達関数は次式で表される。

$$\hat{r}_f(s) = G_{M2}(s)\hat{r}(s) \quad (7)$$

ただし、Fig. 1 の $P^{-1}G_{M2}$ が安定かつプロパーな有理関数である必要があることから、 $G_{M2}(s)$ は $P(s)$ と同じ不安定零点を持ち、相対次数は m_r 以上でなければならない。逆に $G_{M2}(s)$ が上記の条件を満足すれば、 $P(s)$ に対する内部安定化補償器 $C_{FB}(s)$ を任意に定め、さらに Fig. 1 の制御系を構成することで、内部安定かつ $\hat{r}(s)$ から $\hat{r}_f(s)$ までの伝達関数が $G_{M2}(s)$ となる2自由度制御系を構成することができる(注1)。よって、2自由度系で達成可能な \hat{r}_f は、上記の条件を満足する G_{M2} によって(7)でパラメトライズされる。

単位フィードバック系は Fig. 2 に示される。このとき、出

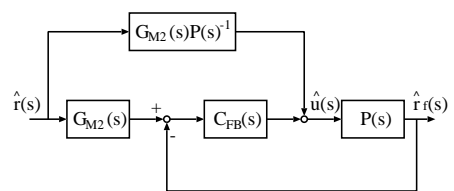


Fig. 1 Two degree of freedom systems

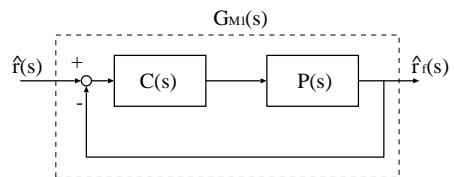


Fig. 2 Unit feedback systems (1-DOF)

(注1) (7)より Fig. 1 の2自由度制御系で達成可能な伝達関数は $C_{FB}(s)$ の選び方に依存しない

力信号 $\hat{r}_f(s)$ は

$$\hat{r}_f(s) = G_{M1}(s)\hat{r}(s) \quad (8)$$

$$G_{M1}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

と表される。2自由度制御系の場合と同様に、この場合も $\hat{r}_f(s)$ は内部安定化補償器 $C(s)$ によって (8) でパラメトライズされる。

上記のような枠組みでも、達成可能な $\hat{r}_f(s)$ はパラメトライズされる。しかしながら、従来導出されていたものは、制御器のパラメトリゼーションを介して $\hat{r}_f(s)$ がパラメトライズされていたため、必ずしも使いやすいものではない。特に、上記のパラメトリゼーションには、 $\hat{r}(s)$ がそのまま入っているため (6) は満たされない。そのため、 $\hat{r}_f(s)$ を考える際には G_{M1} や G_{M2} の条件の他に、 $\hat{r}(s)$ の影響を別途考慮する必要があった (例えば、参照信号がステップの場合には、(6) の必要十分条件は $G_{M1}(0) = 1$)。本論文では、制御系の安定性だけでなく (6) も満足する $\hat{r}_f(s)$ を直接パラメトライズすることを考える。

ここで、本論文で考える参照信号のクラスを周波数領域で以下のように定義する。

$$S_b = \{\hat{r} : \hat{r} \in S_s, \mathcal{L}^{-1}[\hat{r}] \in L_\infty\} \quad (9)$$

ただし、 S_s は厳密にプロパーな実有理関数の集合である。 S_b は、その逆ラプラス変換が有界な信号となるような実有理関数の集合である。

以下の補題⁹⁾は、与えられた $\hat{u} \in S_s$ が $\hat{u} \in S_b$ となるための必要十分条件を与えている。

[補題 1] $\hat{u} \in S_s$ とする。このとき、 $\hat{u} \in S_b$ となるための必要十分条件は、 $\hat{u}(s)$ の極の実部が全て非正となり、かつ虚軸上の極に関しては高々1位であることである。

S_b に属する信号は以下のものが挙げられる。

1. $\sin t, \cos t$ などの三角関数
2. ステップ関数 u_s
3. $e^{-\alpha_s t}$ ($\alpha_s > 0$) で表される指数関数

ただし、 $u_s(t)$ は

$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (10)$$

で表される。また、それらの信号の線形結合も S_b に属する。

本論文では、参照信号は S_b に属する信号と考える。すなわち、 $\hat{r} \in S_b$ である。 $\hat{r}(s)$ が与えられた場合、その不安定零点をそれぞれ $z_{m_z}, \dots, z_{m_z+m_z,ref}$ とし、その相対次数を $m_{r,ref}$ とする。このとき、参照信号の不安定零点は重複しないものとし、制御対象の不安定零点、不安定極とも重複しないものと仮定する。

本論文で考える追従制御問題は以下で与えられる。

[問題 1] 制御対象 $P(s)$ および参照信号 $\hat{r}(s)$ が与えられたと仮定する。このとき、2自由度系、単位フィードバック系

のそれぞれの場合について (6) を満足し、制御系が内部安定性の条件を満足するような全ての出力 $\hat{r}_f(s)$ を求めよ。

上記を満足する出力集合をそれぞれ S_{2-DOF} および S_{1-DOF} と表記する。

本論文ではさらに、追従性能に関する以下の問題も考える。
[問題 2] 制御対象 $P(s)$ および参照信号 $\hat{r}(s)$ が与えられたと仮定する。このとき、それぞれの制御系 [2自由度制御系、単位フィードバック系、入力を直接設計する場合⁹⁾] について、次式を満足する $J(P, \hat{r})$ を見つけよ。

$$J(P, \hat{r}) = \inf \|e\|_2^2 \quad (11)$$

ただし、 $e(t) = r_f(t) - r(t)$ は偏差である。

入力を直接設計する場合は、フィードフォワード入力を直接設計する方法を指す。これは、2自由度系のブロック線図 (Fig. 1) において、 $G_{M2}(s)$ だけでなく、それに印加する入力も設計することに対応する。

また、ここでは、特定の参照信号に対して下限を導出するのではなく、与えられた $\hat{r} \in S_b$ の関数形の詳細に立ち入ることなく $J(P, \hat{r})$ を求める。このとき、2自由度制御系、単位フィードバック系 (1自由度系)、入力信号を直接設計する場合に対応した $J(P, \hat{r})$ をそれぞれ求めることで、制御系の構造の違いに起因する下限値の違いも明らかにする。

3. 出力集合の導出

本節では、問題 1 の解をそれぞれの制御系について求める。まず、 S_{2-DOF} を導出し、その結果を用いて S_{1-DOF} を導出する。

3.1 2自由度系の出力集合

ここでは、2自由度系の場合の出力のパラメトリゼーションの導出を行う。文献 9) では、入力信号を直接設計する場合に達成可能な出力集合 (以降では、 S_{BI} と呼ぶ) を求めている。ここでは、文献 9) および以下の補題を利用して S_{2-DOF} を求める。

[補題 2] 与えられた $P(s)$ と同じ不安定零点、相対次数の安定な有理関数 $G(s)$ 、および、与えられた参照信号 $\hat{r}(s)$ と同じ不安定零点を持つ安定な $M(s)$ がそれぞれ与えられたと仮定する。ただし、 $M(s)$ の相対次数は $m_{r,ref} - 1$ とする。このとき、次式

$$\hat{r}_f(s) = G_{M2}(s)\hat{r}(s) \quad (12)$$

で定められる $\hat{r}_f(s)$ が (6) を満足し、かつ、 $G_{M2}(s)$ および $G_{M2}(s)P^{-1}(s)$ が安定かつプロパーとなるような $G_{M2}(s)$ が存在することと、次式

$$\hat{r}_f(s) = G(s)M(s)\hat{u}(s) \quad (13)$$

で定められる $\hat{r}_f(s)$ が (6) を満足するような入力信号 $\hat{u} \in S_b$ が存在することとは等価である。さらに、上記の条件を満足するある $G_{M2}(s)$ を用いて (12) によって $\hat{r}_f(s)$ が定められ

るとき, (13) を満足する $\hat{u}(s)$ も存在し, またその逆も成り立つ.

【証明】ここでは, $\hat{u}' = \hat{r}/M \in \mathcal{S}_b$ とする (必要性) (6) および (12) を満足する安定な $G_{M2}(s)$ が存在すると仮定する. このとき, $G_{M2}(s)$ を以下のように分解することができる.

$$G_{M2}(s) = G(s)\mathcal{F}_1(s) \quad (14)$$

ただし, $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{S}$ である. このとき, 次式が成り立つ.

$$\hat{r}_f(s) = G(s)\mathcal{F}_1(s)M(s)\hat{u}'(s) \quad (15)$$

$\mathcal{F}_1(s)$ と $M(s)$ の順序を入れ換えると, 制御対象 $G(s)M(s)$ に対し, $\hat{u}(s) = \mathcal{F}_1(s)\hat{u}'(s)$ は (13) を満足する. さらに, $\hat{u}'(s)$ が $\hat{u}' \in \mathcal{S}_b$ であることから, $\hat{u} = \mathcal{F}_1\hat{u}' \in \mathcal{S}_b$ となる.

(十分性) (6) および (13) を満足する $\hat{u}(s)$ が存在すると仮定する. このとき, (6) より, $\hat{u}(s)$ は $\hat{r}(s)$ と同じ虚軸上の極を持ち, $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$ より厳密にプロパーである. そのため, 次式を満足する $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{S}$ が存在する.

$$\hat{u}(s) = \mathcal{F}_2(s)\hat{u}'(s) \quad (16)$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\hat{r}_f(s) = G(s)\mathcal{F}_2(s)M(s)\hat{u}'(s) \quad (17)$$

このとき, $M(s)\hat{u}'(s) = \hat{r}(s)$ より $G_{M2}(s) = G(s)\mathcal{F}_2(s)$ とすると, $G_{M2}(s)$ および $G_{M2}(s)P^{-1}(s)$ はそれぞれ安定かつプロパーとなる. \square

補題 2 より, (12) 式でパラメトライズされる $\hat{r}_f(s)$ の集合と (13) でパラメトライズされる $\hat{r}_f(s)$ の集合が等しいことは明らかである.

上記は $\hat{r}_f(s)$ に関する条件であるが, 文献 9) の結果を用いると, これを偏差 $\hat{e}(s) = \hat{r}_f(s) - \hat{r}(s)$ に関する条件で記述することができる. すなわち, 補題 2 の条件を満足する $\hat{u}(s)$ が存在するための必要十分条件は

$$\hat{r}(z_i) + \hat{e}(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m_z + m_{z,ref} \quad (18)$$

および $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$ の相対次数が $m_r + m_{r,ref}$ 以上であることである. 以後は, 記述の簡略化のため $m_z + m_{z,ref}$ を \hat{m}_z と表し, $m_r + m_{r,ref}$ を \hat{m}_r と表す.

文献 9) の結果を用いることにより, 達成可能な, すなわち上記の条件を満足する \hat{e} のパラメトリゼーションは次の定理によって与えられる.

《定理 1》 z_i ($i = 1, \dots, \hat{m}_z$) は $\text{Re}(z_i) > 0$ かつ $z_i \neq z_j$ ($i \neq j$) となるように任意に与えられた複素数, $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\hat{m}_z-1}, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{\hat{m}_z}, \tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{\hat{m}_r-1}$ は任意に与えられた正の実数とする. さらに, $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$ が任意に与えられたものとする. このとき, 任意の $\hat{e}(s)$ に対して次の 2 つの条件は等価である.

(i) $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$ の相対次数は \hat{m}_r 以上, かつ, $\hat{e} \in \mathcal{S}$,

$$\hat{r}(z_i) + \hat{e}(z_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, \hat{m}_z) \quad (19)$$

が成り立つ.

(ii) $\hat{e} \in \mathcal{S}_{\hat{m}_r}$ が成り立つ. ただし,

$$\mathcal{S}_{\hat{m}_r} = A_{\hat{m}_r}(s) + B_{\hat{m}_r}(s)\mathcal{S} \quad (20)$$

であり, $A_k(s), B_k(s), i = 1, \dots, \hat{m}_r$ は次の漸化式

$$A_{k+1}(s) = A_k(s) + \alpha_k B_k(s) \quad (21)$$

$$B_{k+1}(s) = B_k(s) \frac{1}{s + \tilde{c}_k} \quad (22)$$

$$\alpha_k = - \lim_{s \rightarrow \infty} s^k (\hat{r}(s) + A_k(s)) \quad (23)$$

で定義される関数, $A_0(s), B_0(s)$ はそれぞれ次式で定義される関数である.

$$A_0(s) = - \sum_{i=1}^{\hat{m}_z} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{\hat{m}_z} (s - z_j) \prod_{k=1}^{\hat{m}_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{\hat{m}_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{\hat{m}_z-1} (s + \tilde{a}_k)} \hat{r}(z_i) \quad (24)$$

$$B_0(s) = \frac{\prod_{i=1}^{\hat{m}_z} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{\hat{m}_z} (s + \tilde{b}_i)} \quad (25)$$

このとき, 2 自由度系について次式が成り立つ.

$$\mathcal{S}_{2\text{-DOF}} = \hat{r} + \mathcal{S}_{\hat{m}_r} \quad (26)$$

参照信号が不安定零点を持つ, もしくは参照信号の相対次数が 2 以上の場合, 2 自由度系の出力集合 $\mathcal{S}_{2\text{-DOF}}$ は \mathcal{S}_{BI} の真部分集合となる. 一方, 参照信号の相対次数が 1 で不安定零点を持たない場合は次式が成り立つ.

$$\mathcal{S}_{2\text{-DOF}} = \mathcal{S}_{\text{BI}} \quad (27)$$

3.2 単位フィードバック系の出力集合

本節では, 1 自由度系 (Fig. 2) の場合の出力信号の集合を求める. 2 自由度系と Fig. 2 の単位フィードバック系との違いは内部安定性に関する部分である. 2 自由度系の場合には $G_{M2}(s)$ を $P(s)$ と同じ不安定零点を持ち, かつ相対次数が同じかそれ以上の実有理関数のうちから自由に選べるのに対し, 1 自由度系では, $G_{M1}(s)$ は (6), (12) を満足することに加えて, 制御系が内部安定であることも同時に要求される. Fig. 2 の 1 自由度系に対する内部安定性の条件は次式で表される.

$$\frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = P(s)(1 - G_{M1}(s)) \in \mathcal{S} \quad (28)$$

$$\frac{1}{1 + P(s)C(s)} = 1 - G_{M1}(s) \in \mathcal{S} \quad (29)$$

$$\frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{G_{M1}(s)}{P(s)} \in \mathcal{S} \quad (30)$$

$$\frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = G_{M1}(s) \in \mathcal{S} \quad (31)$$

ここで, (29) ~ (31) は $G_{M1}(s)$ が安定かつ, その相対次数が m_r 以上, $P(s)$ と同じ不安定零点を全て持つならば自動的に成り立つ. そのため, 上記の仮定の成り立つ条件下では, (28) が内部安定であるための必要十分条件となる. 制御対象の不

安定極 p_i ($i = 1, \dots, m_p$) を用いると, (28) は次式と等価である.

$$1 - G_{M1}(p_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m_p \quad (32)$$

一方, (6) を満足し, かつ, $G_{M1}(s)$ が安定, 相対次数が m_r 以上, $P(s)$ と同じ不安定零点を持つ場合を考える. このとき, (32) が成り立てば以下の補償器

$$C(s) = \frac{G_{M1}(s)}{P(s)(1 - G_{M1}(s))} \quad (33)$$

は (28) ~ (31) を満足する. ここで, (6) より $\hat{e} = (G_{M1} - 1)\hat{r} \in S$ となる. よって, (33) の分母に含まれる $1 - G_{M1}(s)$ は \hat{r} のすべての不安定極 (虚軸上の極) をその零点にもつ. このとき明らかに, それらの点は (33) の分子である $G_{M1}(s)$ の零点には成り得ない. よって, (33) が内部モデルを持つことがわかる. また, 第2節では $\text{Re}(p_k) > 0$ と仮定しているが, 結果として $P(s)C(s)$ が $\hat{r}(s)$ と同じ虚軸上の極を持つことから, $C(s)$ ではなく $P(s)$ が $\hat{r}(s)$ と同じ虚軸上の極を持つ, すなわち内部モデルを持つ場合も考えることができる.

仮定より $\hat{r}(p_i) \neq 0$ であることから, (32) と次式は等価である.

$$\hat{e}(p_i) = G_{M1}(p_i)\hat{r}(p_i) - \hat{r}(p_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m_p \quad (34)$$

それゆえ, $S_{1\text{-DOF}}$ に関して次式が成り立つ.

$$S_{1\text{-DOF}} = S_{2\text{-DOF}} \cap (34) \text{ を満足する出力集合} \quad (35)$$

このとき, $S_{1\text{-DOF}}$ は次の定理により導かれる.

《定理2》 $p_i > 0$ ($i = 1, \dots, m_p$) は与えられた $P(s)$ の不安定極, $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{m_p}$ は任意に与えられた正の実数とする. このとき, $S_{1\text{-DOF}}$ は次式で与えられる.

$$S_{1\text{-DOF}} = \hat{r} + \bar{S}_{m_p} \quad (36)$$

$$\bar{S}_{m_p} = \bar{A}_{m_p}(s) + \bar{B}_{m_p}(s)S \quad (37)$$

ここで, $\bar{A}_{m_p}(s)$, $\bar{B}_{m_p}(s)$ は $\bar{A}_0(s) = A_{\hat{m}_r}(s)$, $\bar{B}_0(s) = B_{\hat{m}_r}(s)$ と, 次の漸化式によって与えられる実有理関数である.

$$\bar{A}_{n+1}(s) = \bar{A}_n(s) - \bar{B}_n(s) \frac{\bar{A}_n(p_n)}{\bar{B}_n(p_n)} \quad (38)$$

$$\bar{B}_{n+1}(s) = \bar{B}_n(s) \frac{s - p_n}{s + \bar{d}_n} \quad (39)$$

【証明】 ($S_{1\text{-DOF}} \subseteq \hat{r} + \bar{S}_{m_p}$ の証明) $\hat{r}_f \in S_{1\text{-DOF}}$ とする. このとき, 次式の $Q(s)$ が S に属することを示せばよい.

$$Q(s) = \frac{\hat{r}_f(s) - \hat{r}(s) - \bar{A}_{m_p}(s)}{\bar{B}_{m_p}(s)} \quad (40)$$

定理1 と (39) より, $\bar{B}_{m_p}(s)$ は相対次数が \hat{m}_r であり, z_i ($i = 1, \dots, \hat{m}_z$) および p_k ($k = 1, \dots, m_p$) に零点を持つ. よって,

$$\hat{r}_f(s) - \hat{r}(s) - \bar{A}_{m_p}(s)$$

の相対次数が \hat{m}_r 以上で, z_i , p_k に零点を持ち, さらに安定

ならば $Q \in S$ となる. (35) より $\hat{r}_f(s) - \hat{r}(s)$ が $S_{\hat{m}_r}$ に属することから, $\hat{r}_f(s)$ の相対次数は \hat{m}_r 以上となり, かつ z_i に零点を持つ. 同様に, 付録Bより, \bar{A}_{m_p} が $S_{\hat{m}_r}$ に属することから, $\hat{r}(s) + \bar{A}_{m_p}$ は相対次数が \hat{m}_r となり, かつ z_i に零点を持つ.

一方, (34) より, $\hat{r}_f(s) - \hat{r}(s)$ は p_k ($k = 1, \dots, m_p$) に零点を持つ. さらに, 付録Aの補題4より $\bar{A}_{m_p}(s)$ は p_k ($k = 1, \dots, m_p$) に零点を持つ. よって, (40) の $Q(s)$ は S に属するので, $S_{1\text{-DOF}} \subseteq \hat{r} + \bar{S}_{m_p}$ である.

($S_{1\text{-DOF}} \supseteq \hat{r} + \bar{S}_{m_p}$ の証明) $\hat{r}_f \in \hat{r} + \bar{S}_{m_p}$ と仮定する. このとき, 付録Bより

$$\bar{S}_{m_p} \subset S_{\hat{m}_r} \quad (41)$$

であることから, $\hat{r}_f(s)$ は (6) および (29), (30), (31) を満足する. さらに, 補題4より $\bar{A}_{m_p}(p_k) = 0$, $\bar{B}_{m_p}(p_k) = 0$ が成り立つことから次式が成り立つ.

$$(1 - G_{M2}(p_k))\hat{r}(p_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m_p \quad (42)$$

$\hat{r}(s)$ が p_k ($k = 1, \dots, m_p$) に零点を持たないことより (32) すなわち (28) が成り立つ. よって, 閉ループ系は内部安定となるので, $\hat{r}_f \in S_{1\text{-DOF}}$ である. \square

制御対象を単位フィードバック系で制御する場合, 制御対象が不安定極を持つならば, 1自由度系で達成可能な出力集合は, 2自由度系で達成可能な出力集合の真部分集合となる. 一方, $P(s)$ が安定な場合, (28) は自動的に満たされるため次式が成り立つ.

$$S_{1\text{-DOF}} = S_{2\text{-DOF}} \quad (43)$$

4. H_2 最適な $\hat{e}(s)$ の解析解

前節で求めた $\hat{e}(s)$ の Q -パラメトリゼーションに基づき, 本論文では $\hat{e}(s)$ の H_2 ノルムを最小化する問題, すなわち, 以下の L_2 ノルム最小化問題を考える.

$$\min_{Q \in S} \|\hat{e}\|_2 \quad (44)$$

$$\hat{e}(s) = A(s) + B(s)Q(s) \quad (45)$$

ただし, $A(s)$ および $B(s)$ は $A_{\hat{m}_r}(s)$, $\bar{A}_{m_p}(s)$ および $B_{\hat{m}_r}(s)$, $\bar{B}_{m_p}(s)$ を示す. このとき, $A(s)$ および $B(s)$ が閉右半平面で解析的であることから, $T_1(s) = A(s)$, $T_2(s) = B(s)$, $T_3(s) = 1$ とすることで (44) の H_2 ノルム最小化問題は, 標準的なモデルマッチング問題

$$\min_{Q \in S} \|T_1 + T_2QT_3\|_2 \quad (46)$$

に帰着させることができる. ここで, $A(s)$ の相対次数は1以上であることから, (46) のモデルマッチング問題は可解である.

以降では特に

$$\hat{e}_*^{opt}(s) = \arg \inf \{ \|\hat{e}\|_2 : \hat{r}_f \in S_* \} \quad (47)$$

を陽に求めることを考える．ただし， $\{*\}$ は 2-DOF, 1-DOF を表す．

H_2 ノルムの最小化問題において，次の補題が知られている¹⁰⁾．

〔補題 3〕 閉右半平面で解析的な有理関数 $A(s), B(s), Q(s)$ が与えられ， $A(s)$ および $B(s)$ は厳密にプロパーであると仮定する．さらに， $B(s)$ のインナー・アウトパー分解が

$$B(s) = \Psi(s)\Phi(s) \quad (48)$$

と表されるとする．ただし， $\Psi(s), \Phi(s)$ はそれぞれインナー関数，アウトパー関数である．このとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \|A + BQ\|_2^2 = \\ \|(\Psi^{-1}A)_{unst}\|_2^2 + \|(\Psi^{-1}A)_{st} + \Phi Q\|_2^2 \end{aligned} \quad (49)$$

ここで， $(\Psi(s)^{-1}A(s))_{unst}$ ， $(\Psi^{-1}(s)A(s))_{st}$ は，それぞれ $\Psi(s)^{-1}A(s)$ を部分分数分解したときの反安定部分（閉左半平面で解析的），安定部分（閉右半平面で解析的）である． $\|(\Psi^{-1}A)_{unst}\|_2^2$ は $(\Psi^{-1}A)_{unst}(j\omega)$ の L_2 ノルムである．さらに， $\|A + BQ\|_2$ を最小にする $Q(s)$ は次式

$$Q^{opt}(s) = -\Phi^{-1}(s)(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} \quad (50)$$

で与えられ，このとき次式が成り立つ．

$$\hat{e}^{opt}(s) = A(s) + B(s)Q^{opt}(s) \quad (51)$$

$$\|A + BQ^{opt}\|_2^2 = \|(\Psi^{-1}A)_{unst}\|_2^2 \quad (52)$$

以降では，補題 3 に基づいて，それぞれの制御系に対する L_2 最適な $\hat{e}(s)$ を求めることを考える．

4.1 2 自由度系の場合

2 自由度系で偏差の L_2 ノルムが最適となる偏差信号 $\hat{e}_{2\text{-DOF}}^{opt}(s)$ を求めることを考える． $\hat{e}_{2\text{-DOF}}^{opt}(s)$ は，入力信号を直接設計する場合と同じ方法⁹⁾によって求めることができる．実際， $\hat{e}_{2\text{-DOF}}^{opt}(s)$ は次式で求まる．

$$\begin{aligned} \hat{e}_{2\text{-DOF}}^{opt}(s) = \\ - \sum_{i=1}^{\hat{m}_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{\hat{m}_z} (z_i + \bar{z}_j) \prod_{k=1, i \neq k}^{\hat{m}_z} (s - z_k)}{\prod_{j=1, i \neq j}^{\hat{m}_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{\hat{m}_z} (s + \bar{z}_k)} \end{aligned} \quad (53)$$

(53) は $\hat{e}_{2\text{-DOF}}^{opt}(s)$ の解析解を与えている．このことから，異なる $\hat{r}(s)$ に対しても，LMI などの数値解法を用いることなく $\hat{r}_{f, 2\text{-DOF}}^{opt}(s)$ が求まる．この解析解から， $\hat{r}(z_i)$ が全ての i について小さければ， $\|\hat{e}_{2\text{-DOF}}^{opt}\|_2$ が小さいことがわかる．また， $\hat{e}_{2\text{-DOF}}^{opt}(s)$ は，参照信号 $\hat{r}(s)$ が不安定零点を持たなければ，入力を直接設計した場合と等しい信号となる．

4.2 単位フィードバック系の場合

ここでは，単位フィードバック系で偏差 L_2 ノルムが最小となる偏差信号 $\hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}(s)$ を求めることを考える．

$\hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}$ は $T_1(s) = \bar{A}_{m_p}(s)$ ， $T_2(s) = \bar{B}_{m_p}(s)$ に対する

モデルマッチング問題より求めることができる．このことから， $\hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}(s)$ は次の定理によって得られる．

《定理 3》 不安定零点 z_i ($i = 1, \dots, m_z$) と不安定極 p_j ($j = 1, \dots, m_p$) を持つ制御対象 $P(s)$ および不安定零点 z_i ($i = m_z + 1, \dots, \hat{m}_z$) を持つ参照信号 $\hat{r}(s)$ が与えられたとする．Fig. 2 のフィードバック系を安定化し，かつ $\hat{e}(s) = \hat{r}_f(s) - \hat{r}(s)$ の L_2 ノルムが下限値を取るような $\hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}(s)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}(s) = -\Psi(s) \\ \cdot \sum_{i=1}^{\hat{m}_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{\hat{m}_z} (z_i + \bar{z}_j) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i + \bar{p}_k)}{(s - z_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{\hat{m}_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i - p_k)} \end{aligned} \quad (54)$$

ただし， $\Psi(s)$ は

$$\Psi(s) = \frac{\prod_{i=1}^{\hat{m}_z} (s - z_i) \prod_{i=1}^{m_p} (s - p_k)}{\prod_{i=1}^{\hat{m}_z} (s + \bar{z}_i) \prod_{k=1}^{m_p} (s + \bar{p}_k)} \quad (55)$$

で与えられる．

【証明】まず， $\hat{e}(s) = \hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}(s)$ とするような $Q(s)$ ($Q^{opt}(s)$ と呼ぶこととする) を求めることを考える． $\hat{e}(s)$ の L_2 ノルムは， $\hat{e}(s)$ に任意のインナー関数を掛けたものと等しい．このとき，インナー関数 $\Psi^{-1}(s)$ を $\hat{e}(s)$ に掛けると次式が得られる．

$$\Psi^{-1}(s)\hat{e}(s) = \Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s) + \Psi^{-1}(s)\bar{B}_{m_p}(s)Q(s) \quad (56)$$

ここでは，(56) の L_2 ノルム最小化を考えることで $Q^{opt}(s)$ を求める．

(56) の右辺第 1 項の安定部分，反安定部分をそれぞれ $(\Psi^{-1}\bar{A}_{m_p})_{st} \in H_2$ ， $(\Psi^{-1}\bar{A}_{m_p})_{unst} \in H_2^\perp$ とする．一方で，右辺第 2 項は任意の $Q(s) \in \mathcal{S}$ に対して安定な有理関数である．ここで，補題 3 より次の分解が成り立つ．

$$\begin{aligned} \|\Psi^{-1}\hat{e}\|_2^2 = \|(\Psi^{-1}\bar{A}_{m_p})_{unst}\|_2^2 \\ + \|(\Psi^{-1}\bar{A}_{m_p})_{st} + \Psi^{-1}\bar{B}_{m_p}Q\|_2^2 \end{aligned} \quad (57)$$

よって， $Q^{opt}(s)$ は次式で与えられる．

$$Q^{opt}(s) = -\bar{B}_{m_p}^{-1}(s)\Psi(s)(\Psi^{-1}\bar{A}_{m_p}(s))_{st} \quad (58)$$

$\hat{e}(s)$ に $Q^{opt}(s)$ を代入すると次式が得られる．

$$\hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}(s) = \bar{A}_{m_p}(s) - \Psi(s)(\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s))_{st} \quad (59)$$

\bar{A}_{m_p} が厳密にプロパーであることから

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s))_{st} = \\ \Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s) - (\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s))_{unst} \end{aligned} \quad (60)$$

が成り立つので次式が成り立つ．

$$\hat{e}_{1\text{-DOF}}^{opt}(s) = \Psi(s)(\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s))_{unst} \quad (61)$$

ここで， $\Psi(s)(\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s))_{unst}$ を書き下すことを考える．まず， $(\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s))_{unst}$ について考える． $\bar{A}_{m_p}(s)$ は

安定であるため、反安定部分は $\Psi^{-1}(s)$ の極、すなわち、 z_i ($i = 1, \dots, \hat{m}_z$) および p_k ($k = 1, \dots, m_p$) によって決まる。このうち、補題 4 より $\bar{A}_{m_p}(p_k) = 0$ が成り立つことから、反安定部分には p_k の影響は現れない。よって、反安定部分は、 $\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s)$ の部分分数分解をおこない、 $1/(s-z_i)$ に関する項を集めたものとなる。一方、 $\bar{A}_{m_p}(s)$ は以下のように書き表される。

$$\bar{A}_{m_p}(s) = A_0(s) + \sum_{k=0}^{\hat{m}_r} \alpha_k B_k(s) + \sum_{l=1}^{m_p} \frac{\bar{A}_l(p_l)}{\bar{B}_l(p_l)} \bar{B}_l(s) \quad (62)$$

ここで、(62) のうち $B_k(s)$ および $\bar{B}_l(s)$ が z_i ($i = 1, \dots, \hat{m}_z$) に零点を持つことから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1}(s)\bar{A}_{m_p}(s))_{unst} &= (\Psi^{-1}(s)A_0(s))_{unst} \\ &= - \sum_{i=1}^{\hat{m}_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{\hat{m}_z} (z_i + \bar{z}_j) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i + p_k)}{(s-z_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{\hat{m}_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i - p_k)} \end{aligned} \quad (63)$$

よって、(61)、(63) より定理が成り立つ。□

このとき、 $\hat{e}_{1-\text{DOF}}^{\text{opt}}(s)$ には、不安定零点だけでなく $P(s)$ の不安定極も含まれることがわかる。

5. $J(P, \hat{r})$ の導出

文献 9) で既に求まっている

$$\hat{e}_{\text{BI}}^{\text{opt}}(s) = - \sum_{i=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (z_i + \bar{z}_j) \prod_{k=1, i \neq k}^{m_z} (s - z_k)}{\prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z} (s + \bar{z}_k)} \quad (64)$$

および、(53)、(54) を使い、各制御系に対する $J(P, \hat{r})$ の導出を行う。具体的には、前節でそれぞれ陽に求めた $\hat{e}_{*}^{\text{opt}}(s)$ のノルムを計算をすればよい。ただしここでは、制御対象の不安定極、不安定零点、参照信号の不安定零点はそれぞれ実軸上に存在するものと仮定する。

まずは、2自由度系と1自由度系について考える。任意のインナー関数 $\Phi(s)$ に対して $\hat{e}_{*}^{\text{opt}}(s)$ の L_2 ノルムと $\Phi^{-1}(s)\hat{e}_{*}^{\text{opt}}(s)$ の L_2 ノルムとは等しい。このとき、2自由度系の場合には

$$\Phi(s) = \frac{\prod_{i=1}^{\hat{m}_z} s - z_i}{\prod_{i=1}^{\hat{m}_z} s + \bar{z}_i} \quad (65)$$

を用い、1自由度系の場合には(55)を用いて $\Phi(s) = \Psi(s)$ とする。加えて、付録の補題6を用いることで、次式で与えられる $\mathcal{M}_{*}(s)$ の L_2 ノルムを求めることは $\hat{e}_{*}^{\text{opt}}(s)$ の L_2 ノルムを求めることと等価となる。

$$\mathcal{M}_{*}(s) = \sum_{i=1}^{\hat{m}_z} \frac{\hat{b}_i^{*}}{(s+z_i)}$$

ただし、 \hat{b}_i^{*} はそれぞれ

$$\hat{b}_i^{2-\text{DOF}} = - \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{l=1}^{\hat{m}_z} (z_i + z_l)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{\hat{m}_z} (z_i - z_l)} \quad (66)$$

$$\hat{b}_i^{1-\text{DOF}} = - \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{l=1}^{\hat{m}_z} (z_i + z_l) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i + p_k)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{\hat{m}_z} (z_i - z_l) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i - p_k)} \quad (67)$$

である。 $\mathcal{M}_{*}(s)$ は次のように状態空間実現することができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{*}(s) &= C(sI - A)^{-1}B \quad (68) \\ A &= \text{diag}\{-z_1, \dots, -z_{\hat{m}_z}\}, \\ B &= [\hat{b}_1^{*}, \dots, \hat{b}_{\hat{m}_z}^{*}]^T, \\ C &= [1, \dots, 1] \end{aligned}$$

ここで、(68) に対して次のリアプノフ方程式を考える。

$$A^T X + XA + C^T C = 0 \quad (69)$$

このとき、解 X は次式で与えられる。

$$X_{ij} = \frac{1}{z_i + z_j} \quad (70)$$

さらに、解 X を用いて $\|\hat{e}^{\text{opt}}\|_2^2$ は次式で与えられる¹¹⁾。

$$\|\hat{e}^{\text{opt}}\|_2^2 = B^T X B \quad (71)$$

このことから、 $J_{2-\text{DOF}}(P, \hat{r}) = \|\hat{e}^{\text{opt}}\|_2^2$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} J_{2-\text{DOF}}(P, \hat{r}) &= \sum_{i=1}^{\hat{m}_z} \sum_{j=1}^{\hat{m}_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{l=1}^{\hat{m}_z} (z_i + z_l)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{\hat{m}_z} (z_i - z_l)} \\ &\quad \cdot \frac{\hat{r}(z_j) \prod_{l=1}^{\hat{m}_z} (z_j + z_l)}{\prod_{l=1, l \neq j}^{\hat{m}_z} (z_j - z_l)} \frac{1}{z_i + z_j} \end{aligned} \quad (72)$$

一方、 $J_{1-\text{DOF}}(P, \hat{r})$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} J_{1-\text{DOF}}(P, \hat{r}) &= \sum_{i=1}^{\hat{m}_z} \sum_{j=1}^{\hat{m}_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{l=1}^{\hat{m}_z} (z_i + z_l) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i + p_k)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{\hat{m}_z} (z_i - z_l) \prod_{k=1}^{m_p} (z_i - p_k)} \\ &\quad \cdot \frac{\hat{r}(z_j) \prod_{l=1}^{\hat{m}_z} (z_j + z_l) \prod_{k=1}^{m_p} (z_j + p_k)}{\prod_{l=1, l \neq j}^{\hat{m}_z} (z_j - z_l) \prod_{k=1}^{m_p} (z_j - p_k)} \frac{1}{z_i + z_j} \end{aligned} \quad (73)$$

また、入力 of 直接設計に対する結果は、2自由度系の場合の \hat{m}_z を m_z と置き換えたものに等しい。よって、 J_{BI} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} J_{\text{BI}}(P, \hat{r}) &= \sum_{i=1}^{m_z} \sum_{j=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{l=1}^{m_z} (z_i + z_l)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{m_z} (z_i - z_l)} \\ &\quad \cdot \frac{\hat{r}(z_j) \prod_{l=1}^{m_z} (z_j + z_l)}{\prod_{l=1, l \neq j}^{m_z} (z_j - z_l)} \frac{1}{z_i + z_j} \end{aligned} \quad (74)$$

よって、 $\hat{r}(s)$ が一般的に与えられた場合の偏差 L_2 ノルムの下限値がそれぞれ求めた。このとき、下限値のうち、参照信号の構造による影響が $\hat{r}(z_i)$ によって現れていることがわかる。特に、参照信号が不安定零点を持たない場合には $\hat{r}(z_i)$ 以外の項は制御対象のパラメータのみで表されていることから、この部分が小さければ $P(s)$ は制御しやすい制御対象となる。一方、 $\hat{r}(z_i)$ がそれぞれ小さくなるような参照信号ならば、追従誤差の小さな追従制御が実現できる。これらの結果は、参照信号のラプラス変換を陽に残した関数となっている

ことからわかることである。

6. 数値例を用いた下限値に関する考察

2自由度の場合において、 $\hat{m}_z = 2$, $\hat{r}(s) = \frac{1}{s}$ とすると、次式

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \sum_{i=1}^2 \frac{2}{z_i} \quad (75)$$

が求まる。(75)は、文献2)で与えられるステップの場合と等しい。

次に、参照信号 $\hat{r}(s)$ が不安定零点を持たないものとし、 $\hat{m}_z = m_z = 1$, $m_p = 1$ とした場合を考える。このとき、次式が成り立つ。

$$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = 2z \left(\frac{z+p}{z-p} \right)^2 \hat{r}(z)^2$$

$$J_{2\text{-DOF}} = J_{\text{BI}} = 2z\hat{r}(z)^2$$

ただし、 z は制御対象の不安定零点、 p は不安定極である。 $J_{1\text{-DOF}}$ において、 $2z(z+p/z-p)^2$ は制御対象によってのみ決まる部分である。制御対象の不安定極と不安定零点が近い値を取っている場合には $J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r})$ は大きな値となり、さらに、その極限を考えると $J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r})$ は発散する。一方で、 $J_{2\text{-DOF}}$ には、制御対象の不安定零点の影響が現れない。また、両者を比較すると、 $\hat{r}(s)$ によらず $J_{1\text{-DOF}} > J_{2\text{-DOF}}$ が成り立つことが $(z+p/z-p)^2 > 1$ から明らかである。

ここではさらに、参照信号が不安定零点を持つ場合について、2自由度系の場合と、入力を直接設計した場合の比較を行う。 $P(s)$ が z_1 に、 $\hat{r}(s)$ が z_2 に不安定零点を持つ場合、次

式が成り立つ。

$$J_{\text{BI}} = 2z_1\hat{r}(z_1)^2$$

$$J_{2\text{-DOF}} = 2z_1 \left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} \right)^2 \hat{r}(z_1)^2$$

このとき、 $z_1 = z_2$ ならば J_{BI} は0になる。一方、2自由度系の場合には $\hat{r}(z_1)$ に $z_1 - z_2$ の項が含まれることから $z_1 \rightarrow z_2$ としても $J_{2\text{-DOF}}$ は零とならない。また、 $(z_1+z_2/z_1-z_2)^2 > 1$ より $J_{2\text{-DOF}} > J_{\text{BI}}$ が成り立つ。この結果も $\hat{r}(s)$ によらない結果である。例えば、 $z_1 = 1$, 参照信号を

$$\hat{r}(s) = \frac{s-2}{s^2+1}$$

とした場合、 $J_{\text{BI}} = 0.5$, $J_{2\text{-DOF}} = 4.5$ となり、この場合の参照信号(一点鎖線)および、それぞれの最適な出力は Fig. 3, Fig. 4 のように与えられる。このとき、2自由度系と入力を直接設計する場合で過渡応答に差が現れていることがわかる。

特に、制御対象の全ての不安定零点と同じ不安定零点を持つような参照信号への追従を考える場合、全ての i に対して $\hat{r}(z_i) = 0$ となる。このような場合には $J_{\text{BI}}(P, \hat{r}) = 0$ となる。

7. おわりに

本論文では、追従制御問題において偏差の L_2 ノルムの解析下限を制御入力を直接設計した場合、2自由度系、1自由度系に対してそれぞれ導出した。その際、まず、2自由度系、1自由度系に対する出力集合をパラメトライズし、制御系が異なることでの出力集合の包含関係について考察した。さらに、偏差 L_2 ノルムの下限を与える出力信号を2自由度系、1自由度系について導出した。また、リアプノフ方程式を用いることで下限値 J を、制御対象、参照信号の不安定零点および不安定極を用いた汎関数として書き下した。

従来は、特定の参照信号に対して下限値を求めていたのに対し、本論文では参照信号が有理関数の場合に対する結果を与えている。ここで例えば、参照信号としてサイン関数を選んだ場合、従来は考えられていなかった単位フィードバックでサイン波に追従する場合の下限値を求めることができる。

参照信号については、 $\hat{r}(z)$ の大きさが下限値 J の大きさにインパクトを与えていることがわかる。また、ステップ信号への追従などの場合において知られている結果に近い結果ではあるが、1自由度系の場合には不安定零点だけでなく、不安定極の影響が現れることがわかる。このとき、2自由度系の場合と比べて下限値が大きくなることが例題によって確認でき、両下限値の関係は参照信号の関数形に依存しない。

参考文献

- 1) 原: 制御しやすいシステムの特徴付け, 制御理論シンポジウム資料, 7/12(2003)
- 2) J. Chen, L. Qiu and O. Toker: Limitations on maximal tracking accuracy, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**-1, 45/53(2000)
- 3) J. Chen, S. Hara and G. Chen: Best Tracking and Regulation Performance Under Control Energy Constraint, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**-8,

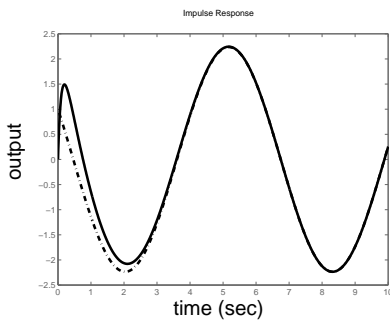


Fig. 3 Output response of $r + e_{\text{BI}}^{\text{opt}}$

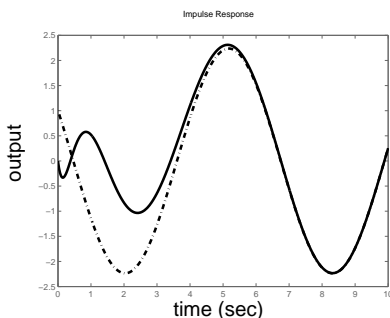


Fig. 4 Output response of $r + e_{2\text{-DOF}}^{\text{opt}}$

1320/1336(2003)

- 4) W. Su, L. Qiu and J. Chen: Fundamental Performance Limitation in Tracking Sinusoidal Signals, *Transactions on Automatic Control*, **48**-8, 1371/1380(2003)
- 5) W. Su, L. Qiu and J. Chen: On Performance Limitation in Tracking a Sinusoid, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51**-8, 1320/1325(2006)
- 6) L. Qiu and E. J. Davison: Performance Limitation of Non-minimum Phase Systems in the Servomechanism Problem, *Automatica*, **29**-2, 337/349(1993)
- 7) 原, Toni: 1 入力多出力線形離散時間系の H_2 制御性能限界, システム制御情報学会論文誌, **19**-10, 391/399(2006)
- 8) 加嶋: 状態空間表現にもとづく H^2 性能限界の解析表現-非最小位相特性による最適制御性能の劣化について-, 計測自動制御学会論文集, **42**-12, 1328/1335(2006)
- 9) 岡島, 浅井: 目標信号に漸近的に追従し有界な入力で達成可能な出力のパラメトリゼーション, システム制御情報学会論文誌, **20**-1, 39/49(2007)
- 10) 藤井: フィードバック制御の理論, コロナ社 (1996)
- 11) 田村, 武藤, 笹川: システム制御のための数学, コロナ社 (2002)
- 12) 前田, 杉江: アドバンスト制御のためのシステム制御理論, システム制御情報学会編, 朝倉書店 (1990)

《付 録》

A. $A_{\hat{m}_r}, B_{\hat{m}_r}, \bar{A}_{m_p}, \bar{B}_{m_p}$ の性質

定理 1 より, $A_{\hat{m}_r}(s)$ は安定であり, $\hat{r}(s) + A_{\hat{m}_r}(s)$ は z_i ($i = 1, \dots, \hat{m}_z$) に零点を持ち, その相対次数は \hat{m}_r 以上である. また, $B_{\hat{m}_r}(s)$ も安定であり, z_i ($i = 1, \dots, \hat{m}_z$) に零点を持つ相対次数 \hat{m}_r の関数である.

また, $\bar{A}_{m_p}(s)$ および $\bar{B}_{m_p}(s)$ に関して以下の補題が成り立つ.
[補題 4] 定理 2 の $\bar{A}_{m_p}(s), \bar{B}_{m_p}(s)$ に関して次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{m_p}(p_k) &= 0, \quad k = 1, \dots, m_p \\ \bar{B}_{m_p}(p_k) &= 0, \quad k = 1, \dots, m_p\end{aligned}$$

【証明】 $\bar{B}_{m_p}(p_k) = 0$ は定理 2 より明らか. よって, $\bar{A}_{m_p}(p_k) = 0$ の証明を以下に示す. $\bar{A}_n(s)$ が p_k ($k = 1, \dots, n$) に零点を持つと仮定すると, $\bar{A}_{n+1}(s)$ は p_k ($k = 1, \dots, n+1$) に零点を持つことは定理 2 の漸化式より明らかである. また, $\bar{A}_1(s)$ は次式で与えられる.

$$\bar{A}_1(s) = \bar{A}_0(s) + \bar{B}_0(s) \frac{\bar{A}_0(p_1)}{\bar{B}_0(p_1)} \quad (\text{A.1})$$

このとき, $\bar{A}_1(p_1) = 0$ である. よって, $\bar{A}_{m_p}(s)$ は p_k ($k = 1, \dots, m_p$) に零点を持つ. \square

B. $\bar{\mathcal{S}}_{m_p}$ と $\mathcal{S}_{\hat{m}_r}$ の関係

[補題 5] $\bar{\mathcal{S}}_{m_p}$ および $\mathcal{S}_{\hat{m}_r}$ に関して次式が成り立つ.

$$\bar{\mathcal{S}}_{m_p} \subset \mathcal{S}_{\hat{m}_r} \quad (\text{B.1})$$

【証明】任意の $\hat{e} \in \bar{\mathcal{S}}_{m_p} + \bar{\mathcal{B}}_{m_p} \mathcal{S}$ が与えられたと仮定する. このとき, $\hat{e}(s) = A_{\hat{m}_r}(s) + B_{\hat{m}_r}(s)Q(s)$ を満足する $Q(s)$ が存在することを示せばよい.

仮定より $\hat{e}(s) = \bar{A}_{m_p}(s) + \bar{B}_{m_p}(s)Q_1(s)$ を満足する $Q_1 \in \mathcal{S}$ が存在する. このとき, $Q(s)$ を次のように定めればよい.

$$Q(s) = \sum_{n=1}^{m_p} \alpha_n \frac{\bar{B}_n(s)}{B_{m_r}(s)} + \prod_{n=1}^{m_p} \frac{s - p_n}{s + \bar{a}_n} Q_1(s) \quad (\text{B.2})$$

ただし, $\alpha_n = \bar{A}_n(p_n) / \bar{B}_n(p_n)$ である. \square

C. L_2 ノルムが等価な式

[補題 6] 任意の正の実数 a_k および実数 b_k ($k = 1, \dots, n$) が与えられたと仮定する. このとき,

$$c(s) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{s - a_k}, \quad \tilde{c}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{s + a_k} \quad (\text{C.1})$$

に対し, $\|c\|_2 = \|\tilde{c}\|_2$ が成り立つ.

【証明】周波数領域における L_2 ノルムの定義は

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-j\omega)f(j\omega)d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

である. ここで, $c(s)$ および $\tilde{c}(s)$ の被積分項において次式が成り立つ.

$$c(-j\omega)c(j\omega) = \tilde{c}(-j\omega)\tilde{c}(j\omega) \quad (\text{C.2})$$

よって補題が成り立つことは明らか. \square

[著者紹介]

岡島 寛 (正会員)



1980年5月23日生, 2004年3月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了. 2007年4月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士後期課程修了. 熊本大学自然科学研究科情報電気電子工学専攻助教となり現在に至る. 博士(工学). システム制御情報学会の会員.

浅井 徹 (正会員)



1968年10月6日生, 1996年3月東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修了. 同年1月日本学術振興会特別研究員. 1997年4月~1998年6月カリフォルニア大学バークレー校客員研究員. 1999年3月大阪大学大学院工学研究科助手, 2002年4月同研究科講師, 2005年4月同研究科助教授, 2007年4月同研究科准教授となり現在に至る. ロバスト制御の研究に従事. 博士(工学). システム制御情報学会の会員.