

論文要旨

軌道追従制御を行う場合、偏差を小さくすることだけでなく、できるだけ速く移動することや、入力が過大にならないようなことも要求される。しかしながら、従来の研究では複数の制御目的を陽に考慮した軌道追従制御則は与えられていなかった。本論文では、軌道追従制御問題を、参照軌道と制御対象が描く軌道の差、制御入力の大きさ、移動時間を制御目的とした最適制御問題に帰着させることを考える。その際、偏差を軌道の長さに関して積分することで、軌道の差の評価を制御対象の速度に依存しない形で導く。以上のように定めた最適制御問題を2点境界値問題に帰着させ、さらに、数値例を用いて提案手法の有効性を検証する。

「軌道の差」の評価に基づく軌道追従制御*

岡島 寛[†]・浅井 徹[†]

Path-Following Control Based on Difference between Trajectories*

Hiroshi OKAJIMA[†] and Toru ASAI[†]

This paper deals with path-following control. In existing path-following methods, velocity of e.g. vehicles has been often given as reference inputs. However, velocity is tied in with other tracking characteristics and there exist trade-offs between velocity, tracking errors, control costs and so on. To deal with the trade-offs explicitly, we first formulate a cost function based on difference between a reference path and trajectories of vehicle motion. The difference is modeled in terms of dynamics of curvature. This formulation enables us to deal with trade-offs among tracking error, reaching time and control costs. The control input can be given by solving a two point boundary problem numerically. The effectiveness of the proposed method is examined by numerical examples.

1. はじめに

自動車の自動運転やマニピュレータが与えられたタスクを行う際の軌道計画問題など、軌道追従制御に関する研究は広く行われている。

軌道追従制御問題には、各時刻での目標位置が与えられ、その点に制御対象を追従させる問題 [1-3] と、平面上あるいは空間中に経路が与えられ、その経路（以後、参照軌道と呼ぶ）に制御対象を追従させる問題 [4-10] とがある。前者の方法は、複数のマニピュレータを同時に動作させる場合など、相互干渉が無いように制御対象の各時刻での位置を定める必要がある場合に用いられる。一方、後者の方法は、自動車の自動運転や飛行機の自動操縦など各時刻での目標位置が事前に定まっていない問題に対して用いられる。

参照軌道上を移動する目標位置を与えておけば、前者の制御則は後者の制御問題の解にもなりうる。しかしながら、この場合にも目標位置を定める方法が必要になることや、移動する目標位置によって速度が制約されるなどの理由から、後者の問題に対して満足 of いく解を与えるとは限らない。そのため、これら2つの問題を別に考

える必要がある。

参照軌道に追従させる問題に対しては、従来、制御対象の位置に依存して決まる参照軌道との距離を定義し、その距離を漸近的に零にするような制御則が導かれている。文献 [4-7] では、制御対象から参照軌道への直交射影を用いて距離を定義している。このうち、文献 [4] では参照軌道が直線の場合、文献 [5-7] では参照軌道が直線以外の場合について追従制御則を導いている。参照軌道が曲線の場合には直交射影を唯一に定めることができない特異点が存在する場合がある。これに対し文献 [8] では、そのような特異点が現われない制御則を与えている。

参照軌道への追従問題に対する多くの従来手法では、主に参照軌道と制御対象の描く軌道を一致させることを目的としている。しかしながら、参照軌道と同じ軌道を描くことが必ずしも必要ではない場合がある。例えば、自動車レースでは移動時間を短くすることが要求される。この場合には、道幅を逸脱しないように走行すればよいのであって、道の中心線を走行することは必ずしも要求されない。この例のように、軌道に追従する際には制御対象の軌道を参照軌道に近づけることだけでなく、他の目的も同時に考慮する必要がある。そこで、本論文では、複数の目的を考慮した軌道追従問題を考える。特にここでは、制御対象が描く軌道と参照軌道との差、制御入力 の大きさ、移動時間を同時に考慮した制御則の導出を考える。

* 原稿受付 1995年8月1日

[†] 大阪大学 大学院工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamada-oka, Suita-city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: Path-following control, Optimal control, Nonlinear systems

本論文の構成は以下の通りである。2.節では軌道追従制御問題を最適制御問題として定式化するための動機付けを行う。3.節では制御対象と参照軌道との幾何学的な関係およびその動特性を特徴付ける。4.節では最適制御問題を具体的に定式化し、5.節で最適制御問題を2点境界値問題に帰着させる。6.節では数値例を用いて提案手法の有効性を検証する。

2. 最適制御に基づく軌道追従制御問題

制御対象の描く軌道と参照軌道が漸近的に一致するような制御則を用いた場合、定常時の制御入力に軌道の形状に依存して決まり、選択の自由度はない。しかしながら、自動車や飛行機などの運動を考えた場合、挙動の安定性などの理由から、入力はあまり大きくならない方がよい。

一方、F1に代表されるような自動車レースなどでは、できるだけ速く移動することが要求される。このような例では、制御対象が描く軌道は参照軌道（自動車レースでは、経路の中心線と与えられる軌道）に厳密に一致することは必ずしも要求されず、参照軌道からの逸脱よりも短時間で移動することを重視した制御が求められる。

このように、追従制御問題においては、参照軌道からの逸脱量だけでなく、制御入力の大きさや移動時間を同時に考慮しなければならない。しかしながら、それら三者はそれぞれ独立に定めることのできるものではなく、互いにトレードオフの関係にある。そこで本論文では、制御入力の大きさや移動時間、許容される参照軌道からの逸脱量を最適制御問題の枠組みで考える。

本論文では最適制御問題の評価関数を以下のように与える。

$$J = J_z + J_u + J_t \quad (1)$$

ただし、 J_z 、 J_u 、 J_t はそれぞれ参照軌道からの逸脱量、制御入力の大きさ、移動時間を評価する項である。本論文では、Fig.1に示されるような参照軌道の区間を考え、その区間での評価関数をそれぞれについて考える。

参照軌道からの逸脱量の評価には、その区間において制御対象が描く軌道と参照軌道との差を用いる。ここで、軌道の差は制御対象の運動や参照軌道の形状に対して決まるので、次節では制御対象と参照軌道との幾何学的関係の動的な振る舞いを明らかにする。

軌道追従を行う際、従来は点と点の関係を考えて制御則を導いていた[1,2,4-8]。これらの方法では、各時刻において、その時刻での偏差などに基づいて制御入力が行われている。文献[1,2]では、参照軌道上を動く目標点が与えられ、その点との偏差に基づいて制御入力が行われる。そのため、制御対象の速度は参照軌道上の点の運動に依存して決まる。また、文献[4-7]では、制御対象の速度と制御対象の追従経路を独立に決めることができるが、未来に追従すべき軌道の情報を利用できないた

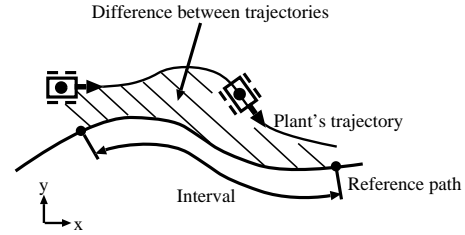


Fig. 1 Difference between trajectories

め、旋回や速度に関する適切な制御入力を定めることができない。一方、本問題では軌道と軌道の間を考慮することにより、制御対象が将来追従すべき参照軌道の情報を利用する。

3. 制御対象と参照軌道の幾何学的な関係

3.1 問題設定

本論文では、制御対象は2次元平面内を運動するものと仮定する。慣性座標系を Σ とし、その正規直交基底をそれぞれ e_1 、 e_2 とする（以後、Fig.2を参照）。参照軌道の座標 p_r は軌道に沿った長さ s の関数として

$$p_r(s) = \xi_r(s)e_1 + \eta_r(s)e_2 \quad (2)$$

と与えられ、 $\xi_r(s)$ および $\eta_r(s)$ はそれぞれ C^3 級と仮定する。さらに、軌道上の各点 $p_r(s)$ に、その点を原点とする座標系 $\Sigma'(s)$ を考え、その正規直交基底をそれぞれ $e'_1(s)$ 、 $e'_2(s)$ とする。ただし、 $e'_1(s)$ は s が増大する向きに接ベクトルとなるようにとる。このとき、

$$e'_1(s) = \frac{dp_r}{ds} = \frac{d\xi_r(s)}{ds}e_1 + \frac{d\eta_r(s)}{ds}e_2 \quad (3)$$

である。ここで、 $e'_1(s)$ が e_1 に対してなす角を $\theta_r(s)$ とすると、 e'_1 および e'_2 は

$$e'_1(s) = \cos(\theta_r(s))e_1 + \sin(\theta_r(s))e_2 \quad (4)$$

$$e'_2(s) = -\sin(\theta_r(s))e_1 + \cos(\theta_r(s))e_2 \quad (5)$$

とあらわされる。また、軌道上各点での軌道の曲率 $\kappa_r(s)$ は次のようあらわされる。

$$\kappa_r(s) = \frac{d\theta_r(s)}{ds} \quad (6)$$

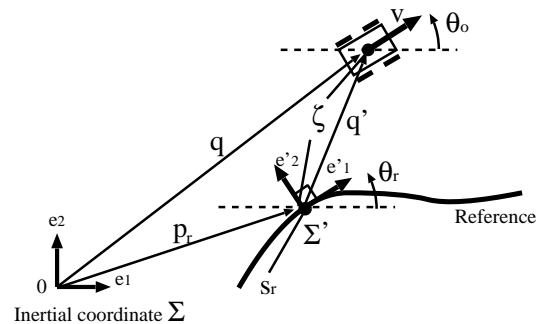


Fig. 2 The reference path and position of the plant

ξ_r, η_r が C^3 級であることから、各点 s において曲率 κ_r は微分可能である。

一方、制御対象の運動は次の状態方程式であらわされるものとする。

$$\dot{x}_p(t) = f_p(x_p(t), u(t)) \quad (7)$$

ただし、 $x_p(t) \in R^n$ は状態、 $u(t) \in R^m$ は制御入力である。制御対象の速度 $v \in R$ および制御対象が描く軌道の曲率 κ は、次のように記述できるものと仮定する。

$$v(t) = h_1(x_p(t), u(t)) \quad (8)$$

$$\kappa(t) = h_2(x_p(t), u(t)) \quad (9)$$

このとき、制御対象の重心の座標を

$$q(t) = \xi(t)e_1 + \eta(t)e_2 \quad (10)$$

とすると、 $q(t)$ は $\kappa(t)$ および $v(t)$ を用いて次式で与えられる。

$$q(t) = \xi(t)e_1 + \eta(t)e_2 \quad (11)$$

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) \cos \theta_o(\tau) d\tau + \xi(t_0) \quad (12)$$

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) \sin \theta_o(\tau) d\tau + \eta(t_0) \quad (13)$$

$$\theta_o(t) = \int_{t_0}^t \kappa(\tau) v(\tau) d\tau + \theta_o(t_0) \quad (14)$$

ただし、 θ_o は速度ベクトルと e_1 のなす角である。

3.2 参照軌道上の点の制御対象の関係

本論文では、参照軌道と制御対象が描く軌道の関係すなわち曲線間を考える。しかしながら、一般にそれら曲線間の幾何学的な関係を簡単な関数で書き表すことはできない。そこで、まず、制御対象の位置と参照軌道上のある点との関係を考え、その推移を考えることで曲線間関係を導く。そのために、制御対象の位置と参照軌道上の点との関係について考える。

参照軌道上の点 t によって変化する場合、その点の座標は $p_r(s_r(t))$ で与えられる。ただし、 s_r は t に関して微分可能と仮定する。以降では表記の簡略化のため、 $p_r(s_r(t))$ を $\hat{p}_r(t)$ と書くこととする。同様に、他の s_r の関数についても $s_r(t)$ を引数とする場合には $(\hat{\cdot})$ を用い、 s_r を省略して表記することとする。

$\hat{p}_r(t)$ から制御対象の重心へのベクトルを $q'(t)$ とすると次の関係式が成り立つ (Fig. 2)。

$$q(t) = q'(t) + \hat{p}_r(t) \quad (15)$$

(11)~(13) 式より $q(t)$ は微分可能である。また、 $p_r(s_r)$ が C^3 級であり、 s_r が微分可能であることから、 $\hat{p}_r(t)$ も微分可能である。このような場合、(15) 式を t で微分した以下の式も成り立つ。

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq'(t)}{dt} + \frac{d\hat{p}_r(t)}{dt} \quad (16)$$

ここで、 $\frac{dq}{dt}$ は (11)~(13) 式より次のようにあらわされる。

$$\frac{dq(t)}{dt} = v(t) \cos(\theta_o(t)) e_1 + v(t) \sin(\theta_o(t)) e_2 \quad (17)$$

一方、(3) 式より $\frac{d\hat{p}_r}{dt}$ は次式であらわされる。

$$\frac{d\hat{p}_r(t)}{dt} = \left. \frac{dp_r(s_r)}{ds_r} \right|_{s_r=s_r(t)} \dot{s}_r(t) = \hat{e}'_1(t) \dot{s}_r(t) \quad (18)$$

次に、 $\hat{e}'_1(t)$ 、 $\hat{e}'_2(t)$ の時間に関する微分を求める。(4)、(5) 式より

$$\frac{d\hat{e}'_1(t)}{dt} = \frac{d\hat{\theta}_r(t)}{dt} (-\sin \hat{\theta}_r(t) e_1 + \cos \hat{\theta}_r(t) e_2) \quad (19)$$

$$\frac{d\hat{e}'_2(t)}{dt} = \frac{d\hat{\theta}_r(t)}{dt} (-\cos \hat{\theta}_r(t) e_1 - \sin \hat{\theta}_r(t) e_2) \quad (20)$$

となる。さらに、 $\frac{d\hat{\theta}_r}{dt}$ は (6) 式を用いて

$$\frac{d\hat{\theta}_r(t)}{dt} = \left. \frac{d\theta_r(s_r)}{ds_r} \right|_{s_r=s_r(t)} \dot{s}_r(t) = \hat{\kappa}_r(t) \dot{s}_r(t) \quad (21)$$

とあわせる。その結果、次式が得られる。

$$\frac{d\hat{e}'_1(t)}{dt} = \hat{\kappa}_r(t) \dot{s}_r(t) (-\sin \hat{\theta}_r(t) e_1 + \cos \hat{\theta}_r(t) e_2) \quad (22)$$

$$\frac{d\hat{e}'_2(t)}{dt} = \hat{\kappa}_r(t) \dot{s}_r(t) (-\cos \hat{\theta}_r(t) e_1 - \sin \hat{\theta}_r(t) e_2) \quad (23)$$

また、 $q'(t)$ の長さに関連する量 ζ を次のように定義する。

$$\zeta(q', s_r) = \text{sgn}(q' \cdot e'_2(s_r)) \|q'\| \quad (24)$$

ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである。 ζ の大きさは q' の大きさを表しており、 ζ の符号は q' の e'_2 方向の成分の符号を与えている。すなわち、 ζ が正ならば e'_1 軸の左半平面すなわち e'_2 が正となる半平面内に制御対象が存在することを意味する。

3.3 幾何学的関係に関する状態方程式

ここまでの関係は、参照軌道上の任意の $s_r(t)$ に対して成り立つ性質である。本論文では、さらに、 q' と e'_1 が直交するような点を参照軌道と制御対象の関係の特徴付ける点として用いる [6,7]。本論文では、この点を参照点と呼ぶ。すなわち、

$$q'(t) \cdot e'_1(s_r(t)) = 0 \quad (25)$$

が成り立つような微分可能な $s_r(t)$ が存在するとき、 $\hat{p}_r(t)$ を参照点とする。しかしながら、そのような $s_r(t)$ の存在は制御対象の軌道と参照軌道の関係に依存し、必ずしも (25) 式を満足する微分可能な $s_r(t)$ が存在するとは限

らない。そこで、そのような $s_r(t)$ の存在条件を導く。

【定理 1】 時間区間 $[t_0, t_1]$ において連続な $\kappa(t)$, $v(t)$ および、制御対象の初期位置 $(\xi(t_0), \eta(t_0))$, 初期角度 $\theta_o(t_0)$ が与えられていると仮定する。さらに、Fig. 2 の関係が成立する、すなわち、(3)~(23) 式が成り立つものと仮定する。このとき、区間 $[t_0, t_1]$ で以下の条件

$$A1 \quad q'(t) \cdot e_1'(s_r(t)) = 0$$

$$A2 \quad 1 - \hat{\kappa}_r(t) \zeta(q'(t), s_r(t)) > 0$$

A3 $s_r(t)$ は t に関して微分可能である

を満たすような $s_r(t)$ が存在するための必要十分条件は、以下の条件を満たす s_{r0} が存在することである。

$$B1 \quad q'(t_0) \cdot e_1'(s_{r0}) = 0$$

$$B2 \quad 1 - \hat{\kappa}_r(s_{r0}) \zeta(q'(t_0), s_{r0}) > 0$$

B3 下記の状態方程式

$$\dot{x}_{re}(t) = f_{re}(x_{re}(t), \kappa(t), \hat{\kappa}_r(t), v(t)), \quad (26)$$

$$x_{re} = \begin{bmatrix} \theta & s_r & z \end{bmatrix}^T$$

$$f_{re}(x_{re}, \kappa, \hat{\kappa}_r, v) = \begin{bmatrix} \kappa v - \hat{\kappa}_r \frac{v \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \\ \frac{v \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \\ v \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\theta(t_0) = \theta_o(t_0) - \hat{\theta}_r(t_0) \quad (27)$$

$$s_r(t_0) = s_{r0} \quad (28)$$

$$z(t_0) = \zeta(q'(t_0), s_{r0}) \quad (29)$$

は時刻 $[t_0, t_1]$ で

$$\|f_{re}(x_{re}(t), \kappa(t), \hat{\kappa}_r(t), v(t))\| < \infty \quad (30)$$

となる解を持つ。

(証明) (必要性) A1, A2, A3 が成り立つとき、 $s_{r0} = s_r(t_0)$ に対し B1, B2, B3 が成り立つことを示す。まず、A1, A2 より B1, B2 が成り立つ。

さらに、A1 より $q'(t)$ の $e_1'(t)$ 成分は 0 であるので、

$$z(t) = \zeta(q'(t), s_r(t)) \quad (31)$$

とすると、 $q'(t)$ は次式によって与えられる。

$$q'(t) = z(t) e_2'(t) \quad (32)$$

さらに、(32) 式を微分することで次式が成り立つ。

$$\frac{dq'(t)}{dt} = \dot{z}(t) e_2'(t) + z(t) \frac{de_2'(t)}{dt} \quad (33)$$

(33) 式を基底 e_1, e_2 を用いてあらわすと、(5), (23) 式より次式が得られる。

$$\frac{dq'(t)}{dt} = P_1 e_1 + P_2 e_2 \quad (34)$$

ただし、

$$P_1 = -\sin \hat{\theta}_r(t) \dot{z}(t) - \hat{\kappa}_r(t) z(t) \cos \hat{\theta}_r(t) \dot{s}_r(t)$$

$$P_2 = \cos \hat{\theta}_r(t) \dot{z}(t) - \hat{\kappa}_r(t) z(t) \sin \hat{\theta}_r(t) \dot{s}_r(t)$$

である。よって、(16), (17), (18), (34) 式より

$$\begin{bmatrix} \cos \hat{\theta}_r(t) & (1 - \hat{\kappa}_r(t) z(t)) \sin \hat{\theta}_r(t) \\ -\sin \hat{\theta}_r(t) & (1 - \hat{\kappa}_r(t) z(t)) \cos \hat{\theta}_r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{s}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_o(t) \\ \cos \theta_o(t) \end{bmatrix} v(t) \quad (35)$$

が成り立つ。ここで A2 より $1 - \hat{\kappa}_r \zeta = 1 - \hat{\kappa}_r z$ が任意の時刻で非ゼロであるので、(35) 式の左辺の行列は正則である。そこで、(35) 式の左から左辺の行列の逆行列を掛けると次式が得られる。

$$\dot{s}_r(t) = \frac{v(t) \cos \theta(t)}{1 - \hat{\kappa}_r(t) z(t)} \quad (36)$$

$$\dot{z}(t) = v(t) \sin \theta(t) \quad (37)$$

ただし、

$$\theta(t) = \theta_o(t) - \hat{\theta}_r(t) \quad (38)$$

である。

(38) 式と (14), (21), (36) 式より次の微分方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \dot{\theta}_o(t) - \frac{d\hat{\theta}_r(t)}{dt} \\ &= \kappa(t) v(t) - \frac{\hat{\kappa}_r(t) v(t) \cos \theta(t)}{1 - \hat{\kappa}_r(t) z(t)} \end{aligned} \quad (39)$$

よって、与えられた $s_r(t)$ とそれぞれ (31), (38) 式で与えられる $z(t)$, $\theta(t)$ は (26) 式の解となる。

A2 および $1 - \hat{\kappa}_r z$ が $[t_0, t_1]$ で連続であることから、 $1 - \hat{\kappa}_r z$ は正の最小値を持つ。よって (26) 式の f_{re} は有界である。

以上より、B1, B2, B3 を満たす s_{r0} は存在する。

(十分性) B1, B2, B3 を満たす s_{r0} が存在すると仮定する。このとき、B3 より $s_r(t)$ は $[t_0, t_1]$ で微分可能であるので A3 が成り立つ。

(14), (21), (26) 式より

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_o(t) - \frac{d\hat{\theta}_r(t)}{dt} \quad (40)$$

が成り立つ。さらに、B3 より (27) 式が成り立つので、

$$\theta(t) = \theta_o(t) - \hat{\theta}_r(t) \quad (41)$$

が成り立つ。

(26) 式より次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{s}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \sin \theta(t) \\ \frac{v(t) \cos \theta(t)}{1 - \hat{\kappa}_r(t) z(t)} \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここで、(42) 式の両辺に左から次の行列

$$\begin{bmatrix} \cos\hat{\theta}_r(t) & (1-\hat{\kappa}_r(t)z(t))\sin\hat{\theta}_r(t) \\ -\sin\hat{\theta}_r(t) & (1-\hat{\kappa}_r(t)z(t))\cos\hat{\theta}_r(t) \end{bmatrix} \quad (43)$$

をかけると(35)式が得られ、さらに左から $[e_2 \ e_1]$ を掛けると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[\cos\hat{\theta}_r(t)\dot{z}(t) + K(t)\sin\hat{\theta}_r(t)\dot{s}_r(t) \right] e_2 \\ & + \left[-\sin\hat{\theta}_r(t)\dot{z}(t) + K(t)\cos\hat{\theta}_r(t)\dot{s}_r(t) \right] e_1 \\ & = v(t)\sin\theta_o(t)e_2 + v(t)\cos\theta_o(t)e_1 \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、 $K(t) = 1 - \hat{\kappa}_r(t)z(t)$ である。さらに(44)式の順番を入れ換えると次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} & v(t)\cos\theta_o(t)e_1 + v(t)\sin\theta_o(t)e_2 \\ & - \left[\cos\hat{\theta}_r(t)e_1 + \sin\hat{\theta}_r(t)e_2 \right] \dot{s}_r(t) \\ & = \dot{z}(t) \left[-\sin\hat{\theta}_r(t)e_1 + \cos\hat{\theta}_r(t)e_2 \right] \\ & + z(t)\hat{\kappa}_r(t)\dot{s}_r(t) \left[-\cos\hat{\theta}_r(t)e_1 - \sin\hat{\theta}_r(t)e_2 \right] \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、(45)式の左辺に(17)、(18)、(4)式、右辺に(5)、(20)、(21)式をそれぞれ代入することで次式が成り立つ。

$$\frac{dq(t)}{dt} - \frac{d\hat{p}_r(t)}{dt} = \dot{z}(t)\hat{e}'_2(t) + z(t)\frac{d\hat{e}'_2(t)}{dt} \quad (46)$$

さらに、(46)式を t に関して積分することで次式が得られる。

$$q(t) - \hat{p}_r(t) = z(t)\hat{e}'_2(t) + C \quad (47)$$

ただし、 C は積分定数である。ここで、 $B1$ より $t = t_0$ で(47)式の左辺は $\zeta(q'(t_0), s_{r0})\hat{e}'_2(t_0)$ である。一方、(29)式が成り立つことから $C = 0$ である。そのため、

$$q(t) - \hat{p}_r(t) = q'(t) = z(t)\hat{e}'_2(t) \quad (48)$$

が得られる。任意の s_r に対して $e'_2(s_r) \cdot e'_1(s_r) = 0$ であることから $A1$ が成り立つ。

また、 ζ の定義より、

$$\begin{aligned} & \zeta(q'(t), s_r(t)) \\ & = \text{sgn}(\hat{e}'_2(t) \cdot (q(t) - \hat{p}_r(t))) \|q(t) - \hat{p}_r(t)\| \\ & = \text{sgn}(z(t)(\hat{e}'_2(t) \cdot \hat{e}'_2(t))) |z(t)| \\ & = z(t) \end{aligned} \quad (49)$$

が成り立つ。

$B2$ より $1 - \hat{\kappa}_r(t_0)z(t_0) > 0$ である。また、(30)式から $[t_0, t_1]$ で $1 - \hat{\kappa}_r z \neq 0$ であり、かつ $1 - \hat{\kappa}_r z$ が連続であるため $1 - \hat{\kappa}_r z$ の符号は変化しない。よって、 $1 - \hat{\kappa}_r z > 0$ が $[t_0, t_1]$ において成り立つ。さらに、(49)式より $A2$ が成り立つ。□

定理1は、 $s_r(t)$ の存在に関する必要十分条件を与えている。すなわち、(25)式を満足しかつ微分可能な $s_r(t)$ の存在は、(26)式の解の存在と等価である。また、(26)式の解が存在すれば、その $s_r(t)$ は(25)式を満足してい

る。このとき、 $z(t)$ の各時刻での大きさは制御対象と参照点との距離となっている。

(7)~(9)、(26)式より、制御対象と参照点は次の状態方程式に支配されることがわかる。

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)), \quad x = [x_p^T, x_{re}^T]^T \quad (50)$$

$$F(x, u) = \begin{bmatrix} f_p(x_p, u) \\ h_1(x_p, u)h_2(x_p, u) - \hat{\kappa}_r \frac{h_1(x_p, u)\cos\theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \\ \frac{h_1(x_p, u)\cos\theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \\ h_1(x_p, u)\sin\theta \end{bmatrix}$$

4. 最適制御問題の定式化

制御対象の状態方程式(7)~(9)式、初期位置 $q(t_0)$ 、初期角度 $\theta_o(t_0)$ 、初期状態 $x_p(t_0)$ および参照軌道 $p_r(s)$ が与えられたとする。さらに、 $B1$ 、 $B2$ を満足する s_{r0} が与えられたと仮定する。参照軌道が端点を持たない場合、 $B1$ を満足する点が必ず1つは存在する。制御対象と上記の点との距離がその点での曲率半径より短かければ、すなわち制御対象が参照軌道の十分近くに存在すれば $B2$ も成り立つ。 $B1$ 、 $B2$ を満足する点が複数存在する場合もあるが、このような場合には、設計者によってその内の一つの点が s_{r0} として与えられるものとする。このとき、 $\zeta(q'(t_0), s_{r0})$ および $\theta(t_0)$ が一意に定まるので、(50)式の状態方程式の初期状態は

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ \theta_o(t_0) - \theta_r(s_{r0}) \\ s_{r0} \\ \zeta(q'(t_0), s_{r0}) \end{bmatrix} \quad (51)$$

と与えられる。

本論文では、(50)式および(51)式の制約下での追従制御問題を評価関数(1)式の最小化問題として与えることを考える。その際、移動時間に関する評価 J_t を与えるために、ここでは参照軌道に沿った有限の長さで与えられる区間を考え、その区間での軌道追従を考える。すなわち、軌道に沿った長さ l が与えられているものとし、 $s_{r1} = s_{r0} + l$ で定められる区間 $[s_{r0}, s_{r1}]$ を考える。この区間に対して、以降では J_z 、 J_u 、 J_t をそれぞれ定義する。

J_z は、制御対象と参照点を結ぶ線分が掃過 (sweep) する領域の大きさで評価することを考える (Fig. 3)。すなわち、 z のある与えられた関数 $D_z(z)$ を積分することで評価を行う。ただし、 $D_z(z)$ は、 $D_z(0) = 0$ 、 $z > 0$ で単調増加、 $z < 0$ で単調減少となるような微分可能な関数とする。

このとき、 $D_z(z)$ を時間 t で積分すると、たとえ制御対象が同じ経路を通ったとしても、その積分値は制御対象の速度に依存する。そのような場合、軌道に関する評

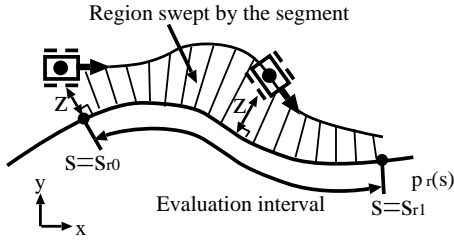


Fig. 3 Cost of difference between trajectories

価を移動時間と独立に評価することができない。

そのため、本論文では J_z を幾何学的な量で定めることを考える。ここでは、 s_r が t に関して単調増加であると仮定する。この仮定は、制御対象が急な U ターンや切り返しを行わなければ成り立つ。このとき、 t から s_r への写像が 1 対 1 となるため、 t を s_r の関数として $t(s_r)$ と書くことができる。よって、 $z(t)$ も s_r の関数となる。そこで、 J_z を次式の s_r に関する積分を用いて定める。

$$J_z = \int_{s_{r0}}^{s_{r1}} D_z(z(s_r)) ds_r \quad (52)$$

このとき、 J_z は制御対象の移動経路に対して定まり、その経路を移動する速度には依存しない。

入力 u の大きさに関する評価 J_u は次のように与える。

$$J_u = \int_{t(s_{r0})}^{t(s_{r1})} D_u(u) dt \quad (53)$$

ただし、 $D_u(u)$ は u に関して微分可能なノルムである。

次に、移動時間の評価は被積分項を定数とすることで以下で与えられる。

$$J_t = g(t(s_{r1}) - t(s_{r0})) = \int_{t(s_{r0})}^{t(s_{r1})} g dt \quad (54)$$

ただし、 g は到達時間を評価するための重みである。

以上より、本論文で考える軌道追従制御問題は (1), (52), (53), (54) 式を評価関数、(50) 式および (51) 式を制約条件とする最適制御問題となる。

5. 2点境界値問題

(52)~(54) 式を用いて (1) 式の評価関数 J を定めるとき、 J_z の積分変数が s_r であるのに対し J_u , J_t の積分変数は t である。そこで、 J_z の積分変数を t に変換する。 s_r が t の単調増加関数であるという仮定より、参照点の速度 \dot{s}_r が区間に渡って正であるため J_z を次のように表すことができる。

$$J_z = \int_{t(s_{r0})}^{t(s_{r1})} D_z(z(t)) \dot{s}_r(t) dt \quad (55)$$

この結果、本論文における評価関数は次式で与えられる標準的な最適制御問題に帰着される。

$$J(u) = \int_{t(s_{r0})}^{t(s_{r1})} (D_z(z) \dot{s}_r(t) + D_u(u) + g) dt \quad (56)$$

このとき、(56) 式には以下の終端拘束条件

$$s_r(t_1) = s_r(t(s_{r1})) = s_{r1} \quad (57)$$

が陰に課されている。

(56) 式の最適制御問題に関して以下の命題が成り立つ。

【命題 1】 以下の条件を満足する連続な $u^*(t)$ と初期状態 $x(t_0)$ が与えられたと仮定する。

1. (50) 式の解 $x^*(t)$ が存在する。
2. 任意の $(x, u) \in \{(x^*(t), u^*(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$ の近傍で $F(x, u)$ の連続な偏導関数が存在する。
3. 以下の線形時変システム

$$\dot{h}(t) = A(t)h(t) + B(t)W(t) \quad t \in [t_0, t_1] \quad (58)$$

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*(t), u^*(t))$$

$$B(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(x^*(t), u^*(t))$$

が可制御である。すなわち、任意の $\epsilon \in R^n$ に対して、 $h(t_1) = \epsilon$ とする $W(t)$ が存在する。

このとき、 $u^*(t)$ が (56) 式で与えられる最適制御問題の最適解ならば、(50) 式、次ページの (59)~(62) 式、(51) 式と

$$\lambda_i(t(s_{r1})) = 0 \quad (i=0,1,3) \quad (63)$$

$$D_z(z) \frac{h_1(x_p, u) \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} + D_u(u) + g + \frac{h_1(x_p, u) \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \lambda_2 \Big|_{t=t(s_{r1})} = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial D_u(u)}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} + D_z(z) \frac{\cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \frac{\partial h_1(x_p, u)}{\partial u} = 0 \quad (65)$$

を満足する $\lambda_0(t) \in R^n$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t) \in R$ が存在する。

(証明) $G(x) = s_r$ とおくと、(57) 式の終端拘束条件は次式で与えられる。

$$G(x(t_1)) = s_{r1} \quad (66)$$

このとき、

$$G_x(x(t_1)) = [0, \dots, 0, 0, 1, 0] \quad (67)$$

であるので、 $G_x(x(t_1))$ は行フルランクである。さらに、(58) 式が可制御であることより、文献 [14] の 9 章の結果を用いると

$$J(u, \lambda) = \int_{t(s_{r0})}^{t(s_{r1})} L(\nu(t)) dt \quad (68)$$

$$L(\nu) = D_z(z) \frac{h_1(x_p, u) \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} + D_u(u) + g$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 = & -\lambda_0^T \frac{\partial f_p(x_p, u)}{\partial x_p} - \lambda_1 \left(\frac{\partial h_1(x_p, u) h_2(x_p, u)}{\partial x_p} - \frac{\partial h_1(x_p, u)}{\partial x_p} \frac{\hat{\kappa}_r \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \right) \\ & - (\lambda_2 + D_z(z)) \frac{\partial h_1(x_p, u)}{\partial x_p} \frac{\cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} - \lambda_3 \frac{\partial h_1(x_p, u)}{\partial x_p} \sin \theta \end{aligned} \quad (59)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\hat{\kappa}_r h_1(x_p, u) \sin \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} \lambda_1 + \frac{h_1(x_p, u) \sin \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} (\lambda_2 + D_z(z)) - h_1(x_p, u) \cos \theta \lambda_3 \quad (60)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\left(\frac{\hat{\gamma}_r h_1(x_p, u) \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} - \frac{\hat{\kappa}_r \hat{\gamma}_r z h_1(x_p, u) \cos \theta}{(1 - \hat{\kappa}_r z)^2} \right) \lambda_1 - \frac{\hat{\gamma}_r z h_1(x_p, u) \cos \theta}{(1 - \hat{\kappa}_r z)^2} (\lambda_2 + D_z(z)), \quad \hat{\gamma}_r(s_r) = \frac{\partial \hat{\kappa}_r}{\partial s_r} \quad (61)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{dD_z(z)}{dz} \frac{h_1(x_p, u) \cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} + \frac{\hat{\kappa}_r^2 h_1(x_p, u) \cos \theta}{(1 - \hat{\kappa}_r z)^2} \lambda_1 - \frac{\hat{\kappa}_r h_1(x_p, u) \cos \theta}{(1 - \hat{\kappa}_r z)^2} (\lambda_2 + D_z(z)) \quad (62)$$

$$+ \lambda^T (F(x, u) - \dot{x})$$

$$\nu = \begin{bmatrix} x \\ u \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

が停留値をとるような $\lambda(t)$ が存在する。このとき、各 i に対して次式が成り立つ。

$$\frac{\partial L}{\partial \nu_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}_i} \right) = 0 \quad (69)$$

(69) 式を具体的に書き下すと、(50), (59)~(62) 式および (65) 式が得られる。

終端時刻が自由であることから、次式も成立する。

$$L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}_i} \dot{\nu}_i \Big|_{t=t(s_{r1})} = 0 \quad (70)$$

よって、(64) 式が成り立つ。

さらに、 s_r 以外の状態の終端状態も自由なので次式も成り立つ。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}_i} \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (i \neq 2n + m + 5) \quad (71)$$

(71) 式より、(63) 式が成り立つ。□

命題 1 は、(1) 式的最適制御問題に最適解が存在する場合、その解は 2 点境界値問題を満足することを示している。よって、2 点境界値問題を満足する解 $u(t)$ が得られれば、その解は最適解の候補を与えている。

命題 1 の 2 点境界値問題は (65) 式の等式制約を伴う問題となっている。ここで、もし、 $F(x, u)$, $h_1(x_p, u)$ が入力に関してアフィン、すなわち $F(x, u)$, $h_1(x_p, u)$ を

$$F(x, u) = F_1(x) + F_2(x)u \quad (72)$$

$$h_1(x_p, u) = h_{11}(x_p) + h_{12}(x_p)u \quad (73)$$

と表すことができ、かつ $D_u(u)$ が正定 2 次形式、すなわち

$$D_u(u) = u^T Q u, \quad Q > 0 \quad (74)$$

で与えられている場合には、(65) 式は

$$\begin{aligned} u(t) = & -\frac{1}{2} Q^{-1} \\ & \cdot \left(F_2(x)^T \lambda + D_z(z) \frac{\cos \theta}{1 - \hat{\kappa}_r z} h_{12}(x_p)^T \right) \end{aligned} \quad (75)$$

と表される。このような場合には、(75) 式の u を (50) 式、(59)~(62), (64) 式に代入することによって、補題 1 の 2 点境界値問題を u を陽に含まない問題として書き表すことができる。さらに、その 2 点境界値問題の解が得られれば、(75) 式によって $u(t)$ が陽に与えられる。

2 点境界値問題については、それを近似的に解くためのアルゴリズムが既存の数値計算パッケージに実装されており、それらを利用することができる。しかしながら、数値計算パッケージによっては、上記のような終端時刻可変の問題を扱えない場合もある。そのような場合には、(59)~(62), (50) 式を s_r に関する常微分方程式に書き換えれば、固定区間での 2 点境界値問題に書き直すことができる。

6. 数値例

提案手法の有効性を数値例により検証する。数値例に用いる制御対象として自動車を考える。

自動車のモデルには、Fig. 4 のヨー角速度 $\dot{\psi}$ 、すべり角 β および車速 v を状態とし、前輪操舵角 δ 、駆動力 w を制御入力とした運動方程式を用いる。

運動モデルは車両速度ベクトルに沿った座標系 (\bar{e}_1, \bar{e}_2) で表現する。このとき、車両速度ベクトルおよび車両重心に働く力はそれぞれ

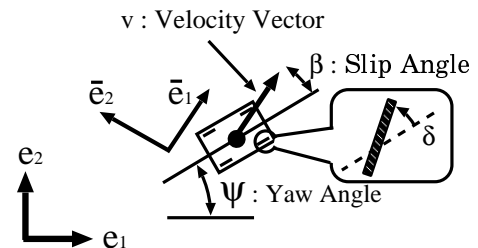


Fig. 4 Vehicle model

$$\mathbf{v} = v_{\bar{e}_1}(t)\bar{e}_1(t) + v_{\bar{e}_2}(t)\bar{e}_2(t) \quad (76)$$

$$\mathbf{f} = f_{\bar{e}_1}(t)\bar{e}_1(t) + f_{\bar{e}_2}(t)\bar{e}_2(t) \quad (77)$$

と表される。さらに、座標系の回転を考慮すると次の運動方程式が得られる。

$$m(\dot{v}_{\bar{e}_1}(t) - v_{\bar{e}_2}(t)(\dot{\psi}(t) + \dot{\beta}(t))) = f_{\bar{e}_1}(t) \quad (78)$$

$$m(\dot{v}_{\bar{e}_2}(t) + v_{\bar{e}_1}(t)(\dot{\psi}(t) + \dot{\beta}(t))) = f_{\bar{e}_2}(t) \quad (79)$$

$$I\dot{\psi}(t) = M(t) \quad (80)$$

ただし、 m は車体重量、 I は車体重心における慣性モーメント、 M は車体重心回りに発生する合トルクである。また、 \bar{e}_1, \bar{e}_2 の定義より、車速を $v(t)$ とすると $v_{\bar{e}_1}(t) = v(t)$ 、 $v_{\bar{e}_2}(t) = 0$ となる。タイヤと接地面との偏角（タイヤすべり角）に比例して横力が発生するという仮定から \mathbf{f} 、 M が求まり、タイヤすべり角が車体すべり角 β や車軸間の距離などで近似的に表されることから以下の状態方程式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{v} & (-1 + \frac{a_{12}}{v^2}) \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_{13}}{v} \\ a_{23} \end{bmatrix} \delta \quad (81)$$

ただし、 a_{ij} は車両の各パラメータから求まる係数である。本論文の運動モデルが車速を可変としていること以外、本質的には [12] の運動モデルと等価である。コーナリングパワ（すべり角-横力の比例定数）が速度や加速度に依存せず、かつ、前後輪タイヤすべり角 (β_f, β_r) が小さいと仮定し、 $\cos\beta_f \approx 1$ 、 $\cos\beta_r \approx 1$ とすると車速が可変な場合でも (81) 式が成り立つ。

一方、車体には車両速度に比例した摩擦減衰力 $\mu(v - v_0)$ および駆動力 w が働くと仮定する。このとき、車速に関する次の状態方程式が得られる。

$$m\dot{v}(t) = \mu(v(t) - v_0) + w(t) \quad (82)$$

ただし、 μ は減衰係数、 m は車体質量である。

以上より、駆動力 w および操舵角 δ を制御入力、すべり角 β 、車体ヨ一角速度 $\dot{\psi}$ および車体速度 v を状態とする次の状態方程式が得られる。

$$\dot{x}_p(t) = f_p(x_p(t), u(t)), \quad (83)$$

$$x_p = [\beta \quad \dot{\psi} \quad v]^T, \quad u = [\delta \quad w]^T$$

$$f_p(x_p, u) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{v}\beta + (-1 + \frac{a_{12}}{v^2})\dot{\psi} + \frac{a_{13}}{v}\delta \\ a_{21}\beta + \frac{a_{22}}{v}\dot{\psi} + a_{23}\delta \\ a_{31}(v - v_0) + a_{32}w \end{bmatrix} \quad (84)$$

ただし、 a_{ij} は定数係数であり、ここでは、各係数を以下のように与える。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43 & -109 & 18 \\ 5.45 & -34.09 & 10.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_0 = 5$$

このとき、制御対象の速度および制御対象の軌道が描く曲率は次式で与えられる。

$$h_1(x_p, u) = v \quad (85)$$

$$h_2(x_p, u) = \frac{a_{11}}{v(t)^2}\beta(t) + \frac{a_{12}}{v(t)^3}\dot{\psi}(t) + \frac{a_{13}}{v(t)^2}\delta(t) \quad (86)$$

(86) 式より v が大きい程、操舵角の影響は小さくなり、旋回が困難になることがわかる。そのため、速度と旋回しやすさの間にトレードオフが存在する。

(56) 式の評価関数において

$$D_z(z) = g_z z^2, \quad D_u(u) = g_\delta \delta^2 + g_w w^2$$

$$s_{r0} = 0, \quad s_{r1} = 20$$

とし、さらに、一般性を失うことなく $g_z = 1$ とする。

まず、重みをそれぞれ $g_\delta = 10$ 、 $g_w = 0.05$ 、 $g = 1$ とした場合に対し、2種類の参照軌道

$$\kappa_r(s) = 0 \quad (87)$$

$$\kappa_r(s) = 0.1 \sin(0.4s) \quad (88)$$

それぞれに追従する場合を考える。ただし、

$$p(s_{r0}) = [0 \ 0]^T, \quad \theta_r(s_{r0}) = 0$$

$$x(t_0) = [0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

とする。このとき、それぞれの参照軌道、初期状態に対して、命題1の解軌道に沿った線形時変システムの可制御性を示すことができる。その詳細については付録で述べる。

それぞれの軌道に対する結果を Fig. 5~Fig. 8 に示す。Figs. 5, 7 は $\{x, y\}$ 平面上の参照軌道（一点鎖線）と制御対象の軌道（実線）を表し、Figs. 6, 8 は時間（横軸）に対する制御入力 δ 、 w および車速 v を表している。

Figs. 5, 7 からわかるように、いずれの場合においても制御対象の描く軌道はある程度参照軌道に近い軌道を描いていることがわかる。また、(87) 式の軌道の場合、Fig. 6 より、長時間にわたって $w > 0$ となっていることから、加速が行われていることがわかる。一方、(88) 式の軌道の場合、Fig. 8 より初期時刻の付近で $w < 0$ となっていることから、制御開始直後に減速が行われていることがわかる。このように、提案手法では参照軌道の形状

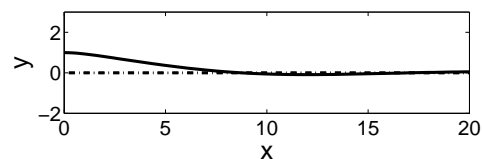


Fig. 5 Resultant trajectory for a line

に応じて適切な入力を得られていることが確認できる。

次に重みと得られる制御入力，制御対象が描く軌道との関係について検証を行う。まず最初に，操舵角と制御対象が描く軌道のトレードオフを調べるために，

$$w = -\frac{a_{31}(v-v_0)}{a_{32}}$$

$$g_w = g = 0$$

とすることで操舵角入力のみを求める問題を与える。ここで，参照軌道は(88)式とし，初期状態は

$$x(t_0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

とする。このとき， $x(t_0)$ において v を状態に持たないことに注意する。

Figs. 9, 10は $g_\delta = 1$ (破線)，100(実線)とした場合のシミュレーション結果であり，Fig.9は制御対象の軌道および参照軌道(一点鎖線)，Fig.10は時間(横軸)に対する δ を表している。Fig.9において， $g_\delta = 1$ の場合には得られる軌道が参照軌道とほとんど重なっているのに対し， $g_\delta = 100$ の場合には制御対象の軌道と参照軌道間に大きな偏差が生じている。一方，Fig.10より， δ は $g_\delta = 1$ の場合よりも $g_\delta = 100$ の場合の方が小さいことがわかる。

次に，到達時間重み g に関する数値例を示す。ここでは，参照軌道を(88)式とし，初期状態を

$$x(t_0) = [0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

とする。 $g_\delta = 5$ ， $g_w = 0.05$ とし， $g = 0$ (破線)， $g = 10$ (実線)の2つの場合を考える。Fig.11は制御対象の軌

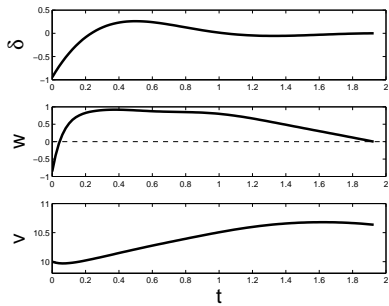


Fig. 6 δ , w and v

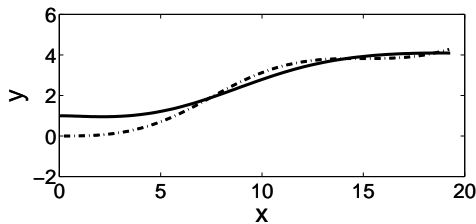


Fig. 7 Resultant trajectory for a curve

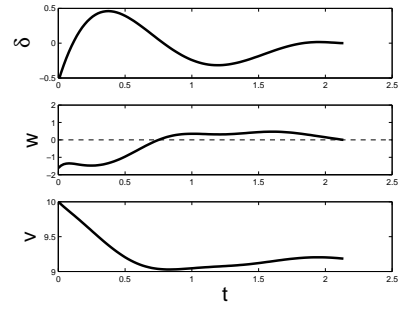


Fig. 8 δ , w and v

道および参照軌道，Fig.12は操舵角入力，Fig.13は制御対象の速度を表している。Fig.13より， $g = 10$ の方が速度は大きくなり，おおよそ $t = 1.5$ で s_{r1} に到達することがわかる。よって， $g = 10$ の方が $g = 0$ (到達時間は $t = 2.3$)よりも到達時間は短い。一方，Figs.11, 12よ

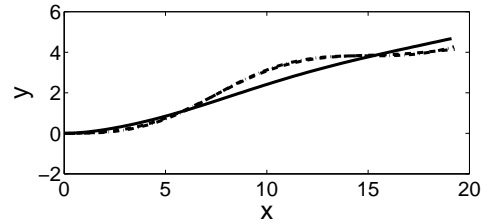


Fig. 9 Resultant trajectories for $g_\delta = 1$ and 100

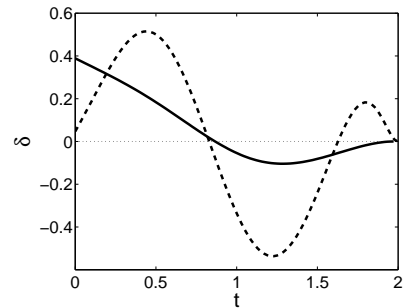


Fig. 10 Control inputs for $g_\delta = 1$ and 100

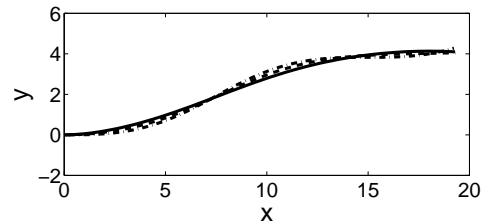


Fig. 11 Resultant trajectories for $g = 0$ and 10

り、追従誤差および入力は $g=0$ の場合の方が小さいことがわかる。よって、重みの調整によって到達時間と追従誤差、入力の大きさと間のトレードオフを扱えることがわかる。

本論文では、PCはceleron2.4GHz、メモリ1GB、OSはwindowsXP、ソフトウェアはMatlab7.0 (関数:bvp4c)を用いてシミュレーションを行った。計算に要した時間は直線軌道、軌道に乗っている場合には0.23秒、Fig.5では0.87秒、Fig.7では1.89秒である。

7. おわりに

本論文では、制御入力、参照軌道からの逸脱量、移動に要する時間を制御目的とした多目的の追従制御問題を考えた。このとき、参照軌道と制御対象が描く軌道の偏差の評価を幾何学的な量として与えることで、移動に要する時間の評価と参照軌道からの逸脱量のそれぞれを互いに独立に評価することが可能となった。さらに、それぞれ与えられた評価関数に対し、その和を評価に用いることで、重みつき最適制御問題として追従制御問題を定式化した。また、定式化した最適制御問題を2点境界値問題に帰着させた。2点境界値問題には、既存の数値計算パッケージで提供されている近似解法を用いることができる。そして、数値例によりその有効性を検証した。

本論文では有限区間の問題を扱っているが、提案手法にモデル予測型のアルゴリズムを適用すれば無限の長さを持つ参照軌道への追従を考えることができる。すなわち、ある s_{r0} から始まる区間に関する計算を行い、得ら

れた入力を印加する。さらに、 s_r がある区間進む毎に再計算を行えばよい。

参考文献

- [1] C. Samson and K. Ait-Abderrahim: Feedback Control of a Nonholonomic Wheeled Cart in Cartesian Space, Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1136-1141 (1991)
- [2] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi: A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot, Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (1990)
- [3] 藤本 健治, 桜間 一徳, 杉江 俊治: 一般化正準変換を用いたハミルトニアンシステムの軌道追従制御, 計測自動制御学会論文集, Vol. 37, No. 8, pp. 741-747 (2001)
- [4] 三平 満司, 伊藤 毅: 非線形制御理論を用いた車両の経路追従制御と移動計画-切り返しを用いた車庫入れ制御, システム制御情報学会論文集, Vol. 6, No. 1, pp. 37-47 (1993)
- [5] M. Sampei, T. Tamura, T. Kobayashi and N. Shibui: Arbitrary Path Tracking Control of Articulated Vehicles Using Nonlinear Control Theory, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 3, No. 1, 125-131 (1995)
- [6] C. Altafni: Following a Path of Varying Curvature as an Output Regulation Problem, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 9, pp. 1551-1556 (2002)
- [7] C. Altafni: Path Following with Reduced Off-Tracking for Multibody Wheeled Vehicles, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 11, No. 4, pp. 598-605 (2003)
- [8] D. Soetanto, L. Lapierre and A. Pascoal: Adaptive, Non-Singular Path-Following Control of Dynamic Wheeled Robots, Proceedings of IEEE International Conference on Decision and Control, pp. 1765-1770 (2003)
- [9] 熊本 博光, 西原 修, 天目 健二, 下浦 弘: 円弧接続コース上のロボト自動操舵-非線形低次元化スライディングモード制御器-, 計測自動制御学会論文集, Vol. 35, No. 3, pp. 340-348 (1999)
- [10] 小野 英一, 細江 繁幸: 自動車操舵系のロボト制御-非線形 H_∞ 状態フィードバックによるロボト安定化-, 計測自動制御学会論文集, Vol. 30, No. 4, pp. 443-451 (1994)
- [11] 加藤 寛一郎: 工学的最適制御, 東京大学出版会 (1993)
- [12] 安部 正人: 車両の運動と制御, 共立出版 (1979)
- [13] 小林 昭七: 曲線と曲面の微分幾何, 裳華堂 (1977)
- [14] 嘉納 秀明, 増淵 正美: 関数解析による最適理論, コロナ社 (1973)
- [15] 大住 晃: 線形システム制御理論, 森北出版株式会社 (2003)

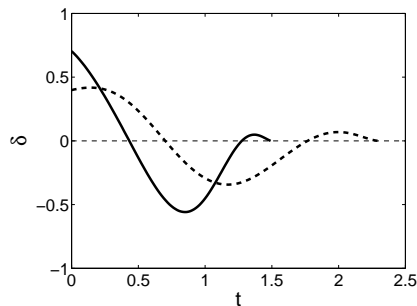


Fig. 12 Control inputs for $g=0$ and 10

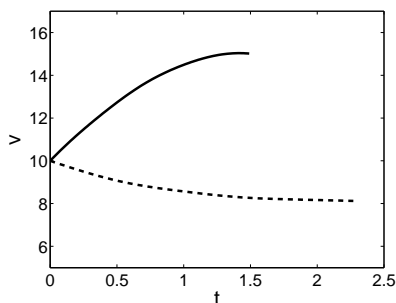


Fig. 13 Velocity for $g=0$ and 10

付 録

線形時変システム

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (A1)$$

$$t \in [t_0, t_1], A(t) \in R^{n \times n}$$

の可制御性は可制御性グラミアンを用いて判定することができる。すなわち、線形時変システムが可制御であることが、次の項が $\tau = t_0$, $T = t_1$ で正則となることと等価となる。

$$\int_{\tau}^T \Phi(t)B(t)B(t)^T\Phi(t)dt \quad (A2)$$

ただし、 Φ は $A(t)$ に関する遷移行列である。この項は一般に半正定値であるが、ある区間 $[\tau, t_2]$ での積分が正定ならば、 t_2 から T まででの遷移行列に関わらず (A2) 式は正定となる。

一方、線形時不変システム

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t), \hat{A} \in R^{n \times n} \quad (A3)$$

の可制御性は

$$\text{rank}[\lambda I - \hat{A} \hat{B}] = n \quad (A4)$$

が全ての \hat{A} の固有値 λ に対して成り立つことと等価となる。特に、(A4) 式が成り立つとき、 $A(t) = \hat{A}$, $B(t) = \hat{B}$ と任意の $T > \tau$ に対して (A2) 式は正定となる [15]。

線形時変システムの $A(t)$ および $B(t)$ がある t_2 で連続かつ

$$\text{rank}[\lambda I - A(t_2) B(t_2)] = n \quad (A5)$$

が成り立てば、任意の $\epsilon > 0$ に対して (A2) 式は $\tau = t_2$, $T = t_2 + \epsilon$ で正定となる。よって、(A1) 式のシステムが可制御であることを示すためには、 $A(t)$, $B(t)$ がある $t_2 \in [t_0, t_1]$ で (A5) 式を満たすことを示せばよい。

ここでは、まず、数値例の直線軌道すなわち $\kappa_r(s) = 0$ の場合について、 $A(t)$, $B(t)$ の可制御性について述べる。このとき、 $\partial f / \partial x$ および $\partial f / \partial u$ は次のように表される。

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_*, u=u_*} \quad (A6)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{v_*} (-1 + \frac{a_{12}}{v_*^2}) & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{v_*} & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 \\ \frac{a_{11}}{v_*} & \frac{a_{12}}{v_*^2} & f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_* & -v_* \sin\theta_* & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta_* & v_* \cos\theta_* & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_*, u=u_*} \quad (A7)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_{13}}{v_*} & a_{23} & 0 & \frac{a_{13}}{v_*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

ただし、 $f_1 \sim f_3$ は次式で表される。

$$f_1(x_*, \delta_*) = -\frac{a_{11}}{v_*^2} \beta_* - \frac{2a_{12}}{v_*^3} \dot{\psi}_* - \frac{a_{13}}{v_*^2} \delta_* \quad (A8)$$

$$f_2(x_*) = -\frac{a_{22}}{v_*^2} \dot{\psi}_* \quad (A9)$$

$$f_3(x_*, \delta_*) = -\frac{a_{11}}{v_*^2} \beta_* - \frac{2a_{12}}{v_*^3} \dot{\psi}_* - \frac{a_{13}}{v_*^2} \delta_* \quad (A10)$$

$A(t)$ の固有値はそれぞれ、 0 , a_{31} および

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{v_*} & -1 + \frac{a_{12}}{v_*^2} \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{v_*} \end{bmatrix} \quad (A11)$$

の固有値となることから、(A5) 式が成り立つための十分条件は以下の条件が成り立つことである。

$$v_* \neq 0 \quad (A12)$$

$$a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} \neq 0 \quad (A13)$$

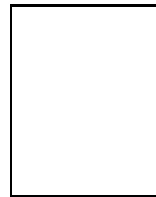
$$\frac{a_{13}(a_{21}a_{13} + a_{22}^2) - a_{22}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{22})}{v_*^2} + a_{22}^2 \neq 0 \quad (A14)$$

本論文の数値例では、(A12)~(A14) 式が任意の $v_* \neq 0$ に対して成り立つ。よって、最適解が $v_* \neq 0$ となるようなものであれば、 $x^*(t)$, $u^*(t)$ 周りでの線形近似システムは可制御である。

一方、参照軌道が曲線すなわち $\kappa_r(s) = 0.1 \sin(0.4s)$ の場合には解析的に可制御性を示すことは難しい。そこで、曲線の場合の $A(t)$, $B(t)$ を導出し、(A4) 式によって、2種類の初期状態に対する t_0 での可制御性を調べた。その結果、双方共に可制御であった。よって、線形近似システムが存在する、すなわち $v_* \neq 0$, $1 - \hat{\kappa}_r(t)z_*(t) \neq 0$ となるような最適解であれば、線形近似システムは可制御となる。

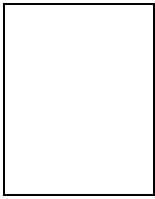
著 者 略 歴

おかじま ひろし
岡島 寛 (学生会員)



論文誌 Vol. 20, No. 1 参照

あさ い とおる
浅 井 徹 (正会員)



論文誌 Vol. 20, No. 1 参照