

通信容量制約に基づく動的量子化器の量子化幅設計と性能解析

岡島 寛*・松永 信智*・澤田 賢治**

Optimal Quantizing Width Design of Dynamic Quantizers based on
the Communication Rate Constraints and Its Performance Analysis

Hiroshi OKAJIMA*, Nobutomo MATSUNAGA* and Kenji SAWADA**

This paper proposes the design method of the dynamic quantizer for the networked control systems. It is well known that feedback type dynamic quantizer such as Delta/Sigma modulator is effective for quantization of data series and many methods for designing the dynamics have been proposed. When it is required to control with network communication, the data size of signal should be minimized appropriately by quantizers. Since the quantizing width of the quantizer concern with the data size, determination of quantizing width is important problem in networked control systems. However, the quantizing width has not been designed analytically in the past researches. In this paper, we propose the design method of the quantizing width based on the LMIs. The quantizing width would be determined explicitly with the communication rate constraints. By the proposed method, the quantizing width guarantee that the signals are quantized appropriately within the given data size. The effectiveness is illustrated by numerical examples.

Key Words: dynamic quantizer, discrete time systems, quantizing level, closed-form expression

1. はじめに

近年, 組込み機器をネットワークで接続した大規模プラントなど, ネットワーク通信を含む制御系が構築されている. 飛行機などのピークルやマニピュレータのテレオペレーション, 遠隔手術などはネットワーク通信を含む制御系であり, その需要が高まっていることから, ネットワークを介した制御系の解析や設計に関する研究が多くなされている^{1)~9)}. ネットワーク制御系においては, 単位時間あたりに送信可能な情報量が限られるため, 通信容量の制約に伴う制御性能の劣化への対処は重要な研究課題である. 従来研究では, 通信容量制約を考慮した安定性解析, 設計についての研究がなされている^{6), 8), 9)}. 例えば, Wongら⁶⁾は不安定な制御対象を安定化させるのに必要な最小伝送レートを不安定極の関数として特徴付けている. また, 新銀ら^{8), 9)}はフィードバック制御系において通信容量制約下での外乱抑制問題を扱っている.

一方, 安定化解析とは別の観点から, 通信容量の制約を考えた上でのフィードフォワード型の伝送も重要である. この

とき, 通信容量制約を満たすためには信号の量子化が必要であり, 信号の効果的な量子化手法として動的量子化器が知られている^{10)~13)}. 静的な量子化では各時刻で信号を近い量子値に丸めるのに対し, 動的量子化器 (Fig. 1) では, 過去の量子化誤差の情報もフィードバックする. その結果として量子化ノイズの影響を整形することが可能となる. このような量子化はデルタシグマ変調¹⁰⁾など, 信号処理などにおいて広く用いられている. また, 制御のための量子化の観点からもフィルタ部 $F(z)$ の設計を主として様々な研究^{11)~18)}がなされており, 制御出力に与える量子化の影響を低減する意味で動的量子化器は有効であることが示されている.

しかし, 従来研究において通信容量の制約は陽に考慮されていなかった. ネットワーク制御系において動的量子化器を用いて信号を量子化する場合, 動的量子化器の出力 v が取りうる信号レベルの数 M (信号レベル数) を通信容量の範囲内に設定する必要がある. 例えば各時刻で 1 ビットの通信が可能な場合, 量子化器の出力は 2 つの値に丸められる必要がある (Fig. 1 の右図). もし, 出力が取るレベル数が 2 より多くなると, 完全な伝送はできない. そのような場合には, 動的

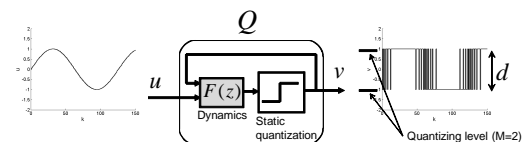


Fig. 1 Example of dynamic quantizer

* 熊本大学自然科学研究科 熊本市黒髪 2-39-1

** 電気通信大学システム工学科 調布市調布ヶ丘 1-5-1

* Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto-City

** Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications, Chofugaoka, Chofu-City

(Received January 28, 2008)

(Revised April 14, 2008)

量子化器に含まれる量子化部分での量子化幅 d を大きく設定することでレベル数が少なくなると予想されるものの、量子化誤差の影響を小さくする観点からは量子化幅はできるだけ小さい方がよく、通信容量と量子化幅にはトレードオフの関係がある。そのため、通信容量制約を考える場合には $F(z)$ だけではなく d の設定も非常に重要となる。しかし、量子化部分を含めた解析はなされておらず、動的量子化器の従来研究においては d は与えられているものと仮定されていた。

そこで本論文では、動的量子化器に対して、通信容量の制約と量子化幅との関係を解析する。具体的には、通信容量から決まる信号レベル数について、そのレベル数を満足する最小の量子化幅を設定する問題を定式化し、動的量子化器のフィルタ部でのダイナミクスと設定可能な量子化幅との関係を LMI 最適化問題として特徴付ける。その結果、LMI 解から導かれる量子化幅では、所定の信号レベル数となることが保証されるのみならず、小さな量子化幅が設定される。また、LMI 問題を解くことにより得た最適値は、フィルタ部の設定に起因する量子化器出力への影響を見積もった量に相当しており、フィルタ部の優劣を評価するために有効な評価指標となる。

本論文の構成を以下に示す。まず、第 2 章で制御系の設定、信号レベル数について概説し、制御問題を設定する。第 3 章では、主結果として LMI を用いた定式化により信号レベル数の制約を満足する量子化幅の設定手法を提案する。また、数値例により有効性の検証を行う。さらに、第 4 章で、特別な場合について、第 3 章の設計手法で最小量子化幅が求まることを示した後、等しい信号レベル数での動的量子化器と静的量子化器の性能差を解析的に与える。この解析解により、動的量子化の効果を定量的に示すことができる。最後に、第 5 章で従来研究との関連性、量子化幅と量子化器パラメータとの同時設計についての考察を行い、第 6 章で結論を述べる。

記号の定義は以下のように与える。ベクトル $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ に対し、 $\|X\|$ は ∞ ノルムを表すものとする。このとき、 $\|X\| := \sup_k |x_k|$ であることに注意する。また、 $\rho(M)$ は行列 M のスペクトル半径である。

2. 問題設定

2.1 ネットワーク制御系

まず、離散時間系の制御対象 P が次式で与えられる場合を考える。

$$P: \begin{cases} x(k+1) &= A_p x(k) + B_p u(k) \\ y(k) &= C_p x(k) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $x \in \mathcal{R}^{n_p}$ は状態、 $u \in \mathcal{R}$ は制御入力、 $y \in \mathcal{R}$ は制御出力である。また、 $A_p \in \mathcal{R}^{n_p \times n_p}$ 、 $B_p \in \mathcal{R}^{n_p \times 1}$ 、 $C_p \in \mathcal{R}^{1 \times n_p}$ である。ここで、 P は安定とする。

さらに P を含む Fig. 2 の制御系を考える。Fig. 2 において、 u は外生信号、 y は制御出力である。 u は遠隔操作を行う場合にはヒトが与える操作量に相当する。また、 Q は量子化器であり、連続値信号を離散値に変換する写像である。エン

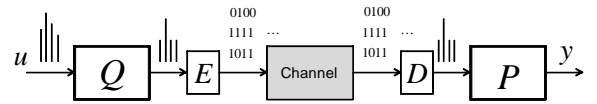


Fig. 2 Feedforward control system with the input quantizer

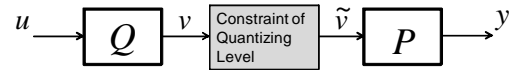


Fig. 3 Simplified system of Fig. 2

コーダ (E) により信号を通信符号化し、通信路 (Channel) を介してデコーダ (D) で復号化する構成となる。これに対し、エンコーダ、デコーダで遅延がないものとし、単純化したシステムを Fig. 3 に示す。 v, \tilde{v} はそれぞれ符号化前の離散値信号、復号化後の離散値信号であり、通信制約に起因して信号レベル数に関する制約を受ける。本論文では通信路による信号劣化は無いものと仮定し、 $v = \tilde{v}$ とする。各サンプリング時刻で伝送できるレベル数 (キャラクター数) を M としサンプリング当たりの通信ビット数を N とすると、 $M = 2^N$ と表わされて M は偶数となる。本論文では M が偶数の場合について議論するが、奇数の場合についても同様の議論が可能である。

一方、外生信号 u の最大値、最小値がそれぞれ既知のものとし、その信号レンジを $U := [u_{\min}, u_{\max}]$ と表記する。すなわち、 $u(k)$ は次式を満足するものと仮定する。

$$u(k) \in U, \forall k \quad (2)$$

2.2 静的一様量子化器における信号レベル数

ここでは、信号レベル数に関する導入として、静的量子化器について、量子化幅と信号レベル数との関係を解析する。安定化問題などでは、原点への収束性が意味を持つことから原点付近での量子化が小さいことが望まれるため、対数量子化器などが用いられている^{5), 6)}。一方本論文では、フィードフォワード型の制御を扱い、特定の点周りでの停留を目的とはしないことから一様量子化器を用いることとする。ただし、レベル数が制約されていることから、飽和要素を有する量子化である点に注意する。 M が偶数の一様量子化においては Fig. 4 に示すようにレベル間隔が入力出力共に等しく、かつ中心に閾値を持つ量子化を行うこととなる。この量子化器 $Q_{st}[\cdot]$ はミッドライザ (ミッドライズ) 形¹⁹⁾の静的一様量子化器であ

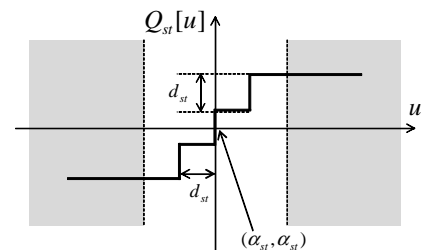


Fig. 4 Mid-riser type uniform quantization ($M = 4$)

る(注 1) . 中心値を α_{st} , 量子化幅 d_{st} とした場合, 入力 u に対して出力は $Q_{st}[u]$ と表わされ, 量子化誤差は次式で与えられる .

$$w_{st} = Q_{st}[u] - u \quad (3)$$

さらに, $u(k) \in V := [\alpha_{st} - Md_{st}/2, \alpha_{st} + Md_{st}/2]$ となる入力 $u(k)$ に対して次式が成り立つ .

$$|w_{st}(k)| \leq \frac{d_{st}}{2} \quad (4)$$

一方, 与えた信号レンジを超える $u(k)$ (Fig. 4 の灰色部分) では $|w_{st}(k)| > d_{st}/2$ となる . このことから, 信号レベル数が M 以下となるためには, α_{st} および d_{st} を次式を満足するように設定しなければならない .

$$U \subseteq V \quad (5)$$

d_{st} はできるだけ小さい方が良いので, (2) 式の信号レンジに対して設定する場合, Fig. 4 の量子化器では以下の設定が (5) 式を満足するうち最も小さな量子化幅を与える .

$$\alpha_{st}^{opt} = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \quad (6)$$

$$d_{st}^{opt} = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{M} \quad (7)$$

一方, これより小さい量子化幅 d_{st} を設定すると (5) 式, すなわち信号レベル数の制約を満たさない $u(k)$ が存在する .

2.3 動的量子化器における量子化幅設計問題

本論文では, 以下の構造の動的量子化器を考える .

$$Q_d : \begin{cases} \xi(k+1) &= A\xi(k) - Bu(k) + Bv(k) \\ v(k) &= Q_{st}[C\xi(k) + u(k)] \end{cases} \quad (8)$$

Q_d は状態 $\xi \in \mathcal{R}^{n_q}$ を含み量子化誤差の影響をメモリにフィードバックする構造であり, $A \in \mathcal{R}^{n_q \times n_q}$, $B \in \mathcal{R}^{n_q \times 1}$, $C \in \mathcal{R}^{1 \times n_q}$ である . ここでは, $A + BC$ の固有値の絶対値が全て 1 未満とする¹³⁾ . 静的量子化器の場合には信号から適した量子化幅が一意に定まるのに対し, (8) 式の動的量子化器では $C\xi + u$ を丸めることから, 静的量子化器と同じ量子化幅で信号レベル数の制約 M を満足できるとは限らない . また, ξ の解軌道が $v(k)$ にも依存することから, (8) 式内での Q_{st} の量子化幅 d の設定は容易ではない .

本論文においては, 動的量子化器のパラメータ行列 $\{A, B, C\}$ は与えられているものと仮定し, Q_d に対する適切な量子化幅 d の設計問題を考える . なお, 通常のデルタシグマ型量子化器の設計¹⁰⁾ ではノイズ整形の観点からフィルタ設計されており量子化幅に依らないこと, 最適動的量子化器では $\{A, B, C\}$ の組が制御対象のダイナミクスのみ依存して決まる¹²⁾ ことから, このような仮定は特別なものではない .

以上の設定に対して, ここでは, 以下の設計問題を考える .
[問題 1] 動的量子化器 Q_d のパラメータ行列 $\{A, B, C\}$ お

(注 1) 操作量がゼロのときに Q_{st} の出力がゼロとなるよう要請がある場合には, 通信容量の制約内で M を奇数となるように設定し, ミッドトレッド型静的一様量子化器を用いればよい .

および信号のレンジ $U = [u_{\min}, u_{\max}]$ がそれぞれ与えられたとする . このとき, 任意の $u(k)$ ($u(k) \in U, \forall k$) に対して動的量子化器の出力 v の信号レベル数が M 以下となる最小の量子化幅 d^{opt} を求めよ . ■

問題 1 に対する解 d^{opt} を得て, $Q_d[\cdot]$ の量子化幅 $d = d^{opt}$ と設定することで信号レベル数を M に抑えつつ, 量子化幅が小さいことによって量子化誤差の影響を小さくすることができる .

3. 主 結 果

3.1 量子化幅設計問題の等価表現

本節では問題 1 を扱う際, 見通しの良い形での表現を考える . 動的量子化器 Q_d においては $\bar{u} = C\xi + u$ を静的一様量子化器で量子化した信号 v を得る . \bar{u} のレンジを見積ることができれば d を決めることができる . 一方, $u(k)$ は各時刻で任意の $u \in U$ の値を取りうるため, $\psi = C\xi$ の信号レンジ $U_\psi = [\psi_{\min}, \psi_{\max}]$ を求めることができれば \bar{u} の信号レンジ \bar{U} は次式で与えられる .

$$\bar{U} = [\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}] \quad (9)$$

$$\bar{u}_{\min} = u_{\min} + \psi_{\min} \quad (10)$$

$$\bar{u}_{\max} = u_{\max} + \psi_{\max} \quad (11)$$

このとき, 特に $\psi_{\max} - \psi_{\min}$ を最小とする信号レンジを $[\psi_{\min}^{opt}, \psi_{\max}^{opt}]$ とすると, ψ_{\min}^{opt} および ψ_{\max}^{opt} を求めることは最小量子化幅 d^{opt} を求めることと等価である .

ここでは, まず ψ_{\min}, ψ_{\max} を特徴付ける . 外生信号 $w(k)$ を以下のように定義する .

$$w(k) = \frac{2}{d}(Q_{st}[C\xi(k) + u(k)] - C\xi(k) - u(k)) \quad (12)$$

このとき, 静的量子化器の定義より $\bar{U} \subseteq V$ の下で次式が成り立つ .

$$|w(k)| \leq 1, \forall k \quad (13)$$

ここで, (12) 式を用いると, ψ に関する状態方程式は以下のように導かれる .

$$\xi(k+1) = (A + BC)\xi(k) + \frac{d}{2}Bw(k) \quad (14)$$

$$\psi(k) = C\xi(k) \quad (15)$$

さらに, (14), (15) 式を $\xi = (d/2)\tilde{\xi}$ により座標変換すると

$$\tilde{\xi}(k+1) = (A + BC)\tilde{\xi}(k) + Bw(k) \quad (16)$$

$$\psi(k) = \frac{d}{2}C\tilde{\xi}(k) \quad (17)$$

となる . ここで, 補助変数 $\tilde{\psi} := 2\psi/d$ を考え, そのレンジを $U_{\tilde{\psi}} = [\tilde{\psi}_{\min}, \tilde{\psi}_{\max}]$ とする . このとき, U_ψ と $U_{\tilde{\psi}}$ の間に以下の関係が成り立つ .

$$U_\psi = \frac{d}{2}U_{\tilde{\psi}} \quad (18)$$

すなわち, $\tilde{\psi}$ を求めることができれば ψ が求まる . 一方, (16), (17), (18) 式より $\tilde{\psi}$ は以下の状態方程式により駆動される .

$$\tilde{\xi}(k+1) = (A+BC)\tilde{\xi}(k) + Bw(k) \quad (19)$$

$$\tilde{\psi}(k) = C\tilde{\xi}(k) \quad (20)$$

ここで, (19), (20) 式は変数である量子化幅 d に依存せず, $U_{\tilde{\psi}}$ を求める問題は以下のように表現される.

[問題 2] (19), (20) 式に対し, 次式を満足する最小の $\tilde{\psi}_{\max}$ および最大の $\tilde{\psi}_{\min}$ を求めよ.

$$\tilde{\psi}_{\min} \leq C\tilde{\xi}(k) \leq \tilde{\psi}_{\max}, \forall \tilde{\xi}(k) \in \Xi \quad (21)$$

ただし, Ξ は $\tilde{\xi}$ の (12) 式で定義される信号 w に対する可到達集合である.

さらに, 問題 2 の解をそれぞれ $\tilde{\psi}_{\max}^{opt}$ および $\tilde{\psi}_{\min}^{opt}$ と表記すると, 以下の定理によって最小量子化幅 d^{opt} が特徴付けられる. **《定理 1》** 問題 2 の解 $\tilde{\psi}_{\max}^{opt}, \tilde{\psi}_{\min}^{opt}$ に対し, 最小量子化幅 d^{opt} は次式で与えられる.

$$d^{opt} = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{M - \frac{1}{2}(\tilde{\psi}_{\max}^{opt} - \tilde{\psi}_{\min}^{opt})} \quad (22)$$

一方, $M - (\tilde{\psi}_{\max}^{opt} - \tilde{\psi}_{\min}^{opt})/2 \leq 0$ の場合には信号レベル数の制約を満足する量子化幅 d は存在しない.

(証明) $\tilde{\psi}_{\max}^{opt}, \tilde{\psi}_{\min}^{opt}$ を用いると $\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}$ は次式で与えられる.

$$\bar{u}_{\min} = u_{\min} + \tilde{\psi}_{\min}^{opt} \frac{d}{2} \quad (23)$$

$$\bar{u}_{\max} = u_{\max} + \tilde{\psi}_{\max}^{opt} \frac{d}{2} \quad (24)$$

よって, (7) 式の u_{\min}, u_{\max} をそれぞれ $\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}$ に置き換えて整理すると d^{opt} が求まる.

定理 1 は $\tilde{\psi}_{\min}^{opt}, \tilde{\psi}_{\max}^{opt}$ と最適量子化幅との関係を示している. $U_{\tilde{\psi}}$ は動的量子化器のパラメータ行列 $\{A, B, C\}$ のみによって特徴付けられるため, 動的量子化器パラメータが通信に適したものの可否を決めるインデックスとしての役割を果たしていると考えられる. 特に, $\tilde{\psi}_{\max}^{opt} - \tilde{\psi}_{\min}^{opt}$ が大きな値として求まった場合には $M - (\tilde{\psi}_{\max}^{opt} - \tilde{\psi}_{\min}^{opt})/2 \leq 0$ となり, 信号レベル数の制約を満足することができない $u(k)$ が存在する. このような場合には, 量子化器パラメータ行列 $\{A, B, C\}$ の再設計が要求されることがこの定理から導かれる.

また, 定理 1 より問題 1 を解くことと問題 2 を解くことは等価であるとわかる. 問題 2 は半正定値計画法などを用いた解法への見通しが良いことからこの等価変換は最小量子化幅を見積もるのに有効であるといえる. 以降では問題 2 について, その解法の考察を行う.

3.2 LMI 最適化に基づく信号レベル数制約を満足する量子化幅の導出

$\tilde{\psi}_{\min}^{opt}$ および $\tilde{\psi}_{\max}^{opt}$ を求める場合, 状態 $\tilde{\xi}$ の可到達集合を求める必要がある. しかし, 通常, 可到達集合の導出は容易ではない. ここでは, 実用的な解の導出を目的として問題 2 を LMI 最適化問題の枠組みで解くことで, 信号レベル数の制約を満足する量子化幅 d を導く.

$U_{\tilde{\psi}}$ の導出には不変集合に関する結果²⁰⁾を利用する. $\xi(k)$

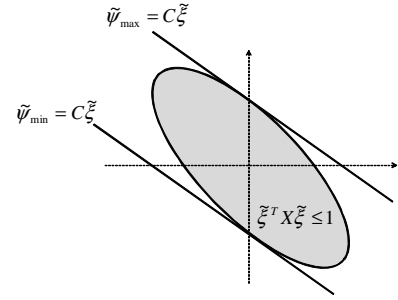


Fig. 5 Invariant ellipsoid of $\tilde{\xi}$

を任意外乱 $\omega(k)$, $|\omega(k)| \leq 1, \forall k$ を用いて駆動させた場合について, 不変集合に関する以下の定義を用いる.

【定義】 集合 \mathcal{X} が離散時間システムの対 (A, B) の不変集合であることを

$$\xi \in \mathcal{X}, |\omega| \leq 1 \Rightarrow A\xi + B\omega \in \mathcal{X} \quad (25)$$

とする.

ここで, 不変集合には可到達集合が含まれることから, 不変集合を用いれば $U_{\tilde{\psi}}$ を保守的ながら見積もることは可能である. このとき, 可制御対 (A, B) について不変集合 \mathcal{X} は以下の定理によって特徴付けられる²⁰⁾.

《定理 2》 離散時間システムの対 (A, B) において, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ とする. このとき, 正定行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して楕円体 $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi^T X \xi \leq 1\}$ がこの対の不変集合であるための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} A^T X A - (1 - \beta)X & A^T X B \\ B^T X A & B^T X B - \beta I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (26)$$

を満す $\beta \in [0, 1 - \rho(A)^2]$ が存在することである.

定理 2 では, 不変集合が正定行列 X によって特徴付けられている. 一方, (19) 式における可制御対は $((A+BC), B)$ である. よって, ある与えられた X について (26) 式の β に関する LMI が可解であれば, w ($|\omega(k)| \leq 1$) について $\tilde{\xi}(k)$ は得られた楕円体の内側に存在する (Fig. 5). さらに, この不変集合を用いて $C\tilde{\xi}$ の信号レンジは次の $\tilde{\psi}_{\max}$ の最小値を見つけることで求まる.

$$\tilde{\psi}_{\max}^* = \min \tilde{\psi}_{\max} \quad (27)$$

subject to

$$- \begin{bmatrix} X & C^T \\ C & \tilde{\psi}_{\max}^2 \end{bmatrix} \leq 0$$

(27) 式を図的に解釈すると, 状態が 2 次の場合には Fig. 5 の 2 本の直線により不変集合を囲むことを意味する. なお, $\tilde{\psi}_{\min} = -\tilde{\psi}_{\max}$ である.

以上の結果をまとめると, $\tilde{\psi}_{\max}$ を求める問題は以下のように定式化できる.

[問題 3] 動的量子化器パラメータ行列 $\{A, B, C\}$ が与えられたとする. このとき, 次の $\tilde{\psi}_{\max}^* (> 0)$ を求めよ.

$$\tilde{\psi}_{\max}^* = \min_{X>0, \beta} \tilde{\psi}_{\max} \quad (28)$$

subject to

$$-\begin{bmatrix} X & C^T \\ C & \tilde{\psi}_{\max}^2 \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} (A+BC)^T X(A+BC) - (1-\beta)X & (A+BC)^T X B \\ B^T X(A+BC) & B^T X B - \beta I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\beta \in [0, 1 - \rho(A+BC)^2]$$

ここで、正定行列 X も設計変数である点に注意する．問題 3 は、スカラー変数である β を固定すると LMI 最適化問題に帰着される．よって、 β に関するラインサーチおよび $\tilde{\psi}_{\max}$ 、 X に関する内点法を併用することで問題 3 の解、すなわち、 $\tilde{\psi}_{\max}^*$ および $\tilde{\psi}_{\min}^* = -\tilde{\psi}_{\max}^*$ を求めることができる．さらに定理 1 同様に \bar{u}_{\min} 、 \bar{u}_{\max} を用いた計算により量子化幅 d^* は次式で与えられる．

$$d^* = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{M - \tilde{\psi}_{\max}^*} \quad (29)$$

Q_d 内における $Q_{st}[\cdot]$ の量子化幅を $d = d^*$ とすると、出力信号 v が取るレベル数は必ず M 以内に抑えられる．すなわち、 d^* は信号レベル数の制約を満足する解の一つとなっている．また、(6) 式において u_{\min} 、 u_{\max} をそれぞれ \bar{u}_{\min} 、 \bar{u}_{\max} に置き換えて計算することで、動的量子化器の信号の中心値 α^* は $\alpha^* = \alpha_{st}^{opt}$ と求まる．

このとき、 $d^* \geq d^{opt}$ となる意味での保守性は、不変集合を用いて $U_{\tilde{\psi}}$ を見積もっていること、任意外乱 $\omega(k)$ に対する解析手法を用いていることに起因している．しかし、この保守性は大きなものではなく、実用上小さな量子化幅が求まっていると期待できる．一方、可到達集合をさらに正確に見積もることができれば、信号レベル数の制約を満たすより小さな量子化幅 d を求めることが可能となる．

また、求めた $\tilde{\psi}_{\max}^*$ の値は、動的量子化器のパラメータ行列 $\{A, B, C\}$ のみに依存して決まる量であり、この大きさは動的量子化に起因する信号の振れを特徴付けている． $\tilde{\psi}_{\max}^*$ が小さいほど信号の振れ幅は小さくなるため、量子化幅を小さく設定できる．一方、 $\tilde{\psi}_{\max}^*$ が大きい場合は、量子化幅を大きく設定せざるを得ず、場合によっては通信容量の制約を満たさない．この意味で、 $\tilde{\psi}_{\max}^*$ の大きさは動的量子化器の性能を測るための評価指標の一つと考えることができ、動的量子化器を用いて通信制御系を構築する上での有用な情報を与える．

3.3 数値例

本節では前節で得た LMI 最適化問題を解くことで量子化幅 d^* に関する数値例を示す．信号レベル数の制約が $M = 2, 4, 8$ のそれぞれの場合を、信号 u のレンジを $U = [-1, 1]$ とした場合を考える．このとき、静的量子化器での最小量子化幅 d_{st}^{opt} は、それぞれのレベル数 M に対して $d_{st, M=2}^{opt} = 1$ 、 $d_{st, M=4}^{opt} = 0.5$ 、 $d_{st, M=8}^{opt} = 0.25$ と求まる．動的量子化器の

パラメータ行列 $\{A, B, C\}$ は以下の 2 種類 (量子化器 1, 量子化器 2) を与え、それぞれの解析を行う(注 2)．

量子化器 1

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.733 & -0.0861 & 0.172 \\ 0.172 & 0.991 & 0.0181 \\ \hline -19.0 & -9.10 & \end{array} \right)$$

量子化器 2

$$\left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.733 & -0.172 & 0.0861 \\ 0.0861 & 0.991 & 0.00450 \\ \hline -19.0 & -219 & \end{array} \right)$$

なお、与えた 2 種類の量子化器は、以下の制御対象

$$P_1(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2} \quad (30)$$

$$P_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \quad (31)$$

をサンプリング時間 $\Delta T = 0.1$ [s] で零次ホールドで離散化し、それぞれの制御対象に対する最適動的量子化器¹²⁾を求めて得たものである．

ここではまず、量子化器 1 についての数値結果を示す．問題 3 を解くことにより $\tilde{\psi}_{\max}^* = 1.484$ を得た．このとき、各信号レベル数 M に対して d^* はそれぞれ $d_{M=2}^* = 3.876$ 、 $d_{M=4}^* = 0.795$ 、 $d_{M=8}^* = 0.307$ と求まる．Fig. 6~8 はそれぞれ $M = 2, 4, 8$ の場合に $u(k) = \sin(0.05k)$ を印加した場合の量子化器の出力を示している．それぞれについて、細い実線が $u(k)$ 、細い一点鎖線が動的量子化器の出力 $Q_d[u(k)]$ 、太い実線が静的量子化器の出力 $Q_{st}[u(k)]$ を示している． $M = 2$ の場合、出力 v は -1.938 および 1.938 の二値のみを取っていることがわかる．同様に、それぞれにおいて、本手法での d^* の設定でレベル数の制約を満足していることが確認できる．

一方、量子化器 2 の場合に LMI 問題を解くと $\tilde{\psi}_{\max}^* = 35.49$ を得たが、この値は量子化器 1 と比べて非常に大きい．このとき、各 $M = 2, 4, 8$ について $M < \tilde{\psi}_{\max}^*$ となるため d^* は存在しない．ここでは、量子化器 2 の量子化幅 $d = 100$ とし、 $u(k) = \sin(0.05k)$ を印加した場合の応答を Fig. 9 に示す．Fig. 9 では、 $d = 100$ と大きな値を設定しているにも関わらず、信号レベル数が大きくなる (本数値例では 14) ことが確認でき、レベル数の制約を満たしていないことがわかる．その上、この場合には $d = 100$ と与えているので、結果的に出力応答も悪いものとなる．

よって、信号レベル数が制約された問題設定においては、必ずしも量子化幅固定で最適設計された動的量子化器が良い性能を示すとは限らないことが本数値例から確認でき、パラメータ行列 $\{A, B, C\}$ だけでなく d も同時に考慮して動的量子化器を設計することが必要とわかる．

(注 2) 数値例においては、制約を満たすか否かを確認する目的で飽和のない $Q_{st}[\cdot]$ を用いている．

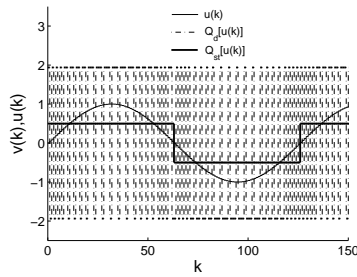
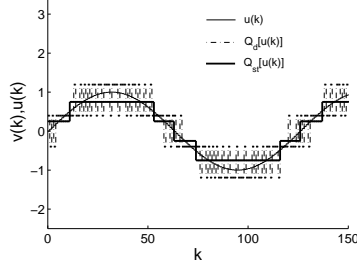
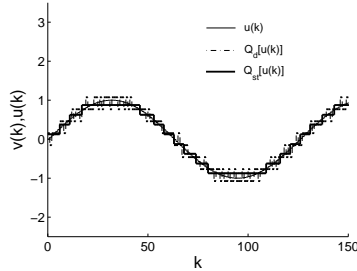
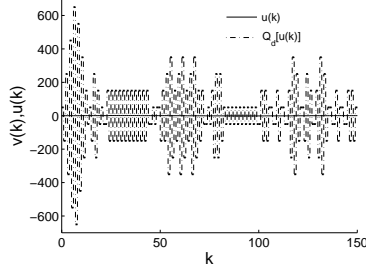
Fig. 6 The signals of $M = 2$ Fig. 7 The signals of $M = 4$ Fig. 8 The signals of $M = 8$ 

Fig. 9 Quantized signal of optimal quantizer

4. 1 次の動的量子化器に対する性能解析

本章では、第3章で導いた結果の特殊な場合として、1次の動的量子化器の性能解析を行う。まず、最適動的量子化器¹²⁾について概説し、この量子化器に対しては最適量子化幅 d^{opt} が求まることを示す。また、従来より動的量子化器を用いた場合の性能が静的量子化器より改善されることは知られているものの、定量的な解析は少ない^(注3)。特に、同じ通信容量制約の条件下での静的量子化器と動的量子化器との比較解析

(注3) 文献16)において $C = 0$ と設定した場合や一次系¹⁸⁾では、固定量子化幅における静的量子化器との比較解析ができる。

は従来なされていない。そこでここでは、出力応答の性能に関する評価を考え、同じ信号レベル数における動的量子化器と静的量子化器との量子化性能の性能差を解析解(閉形式解)として導くことで動的量子化器の優位性についての考察も行う。

4.1 最適動的量子化器の設計

本節では、文献12)で提案されている最適動的量子化器について概説する。ここでは特に、制御対象 P が1次、すなわち A_p, B_p, C_p がスカラの場合を扱う。ただし、文献12)では量子化幅 d は与えられているものと仮定されている。

P を制御対象とする Fig. 10 のシステムが与えられた場合、 P に対して連続値入力 $u(k)$ を印加すると出力 $y_r(k)$ を得る(以降では $y_r(k)$ を理想出力と呼ぶ)。一方、量子化器 Q_d によって丸められた値 $v(k)$ が P に印加される場合には、出力 $y(k)$ は理想出力 $y_r(k)$ とは異なった値をとる。この出力の差 $e(k) = y(k) - y_r(k)$ はできるだけ小さい方が望ましい。これに対し、以下の評価関数

$$E(Q_d) = \sup_U \| \mathcal{Y} - \mathcal{Y}_r \| \quad (32)$$

を考える。ただし、 \mathcal{U} は入力ベクトル $\mathcal{U} := \{u(0), u(1), \dots\}$ であり、 \mathcal{Y} は $\mathcal{Y} := \{y(0), y(1), \dots\}$ 、 \mathcal{Y}_r は $\mathcal{Y}_r := \{y_r(0), y_r(1), \dots\}$ で表わされるベクトルである。このとき、 $E(Q_d)$ は任意の $u(k)$ に対する出力誤差 $e(k)$ の最大値を評価している。出力誤差の最大値が小さければ、離散値入力システムであることを意識せずフィードフォワードの入力 $u(k)$ を設計できることから $E(Q_d)$ は小さい方が望ましい。

評価関数 $E(Q_d)$ を最小とする動的量子化器 Q_d^* は次式で与えられる。

$$Q_d^* : \begin{cases} \xi(k+1) &= A_p \xi(k) - B_p u(k) + B_p v(k) \\ v(k) &= Q_{st} [-(B_p)^{-1} A_p \xi(k) + u(k)] \end{cases} \quad (33)$$

さらに、評価値は次式となる。

$$E(Q_d^*) = |C_p B_p| \frac{d}{2} \quad (34)$$

ここで、出力誤差の最大値は制御対象 P および量子化幅 d により決まることがわかる。なお、 P が安定、最小位相であるため量子化器を含む系の安定性は保証される¹³⁾。

4.2 Q_d^* に対する最適量子化幅 d^{opt}

本節では、信号レベル M における最適動的量子化器 Q_d^* の性能を静的量子化器との比較により解析する。その際、 d^{opt} の導出は代数的な計算により以下のように導くことができる。

まず、問題3において最適動的量子化器 Q_d^* を用いた場合、

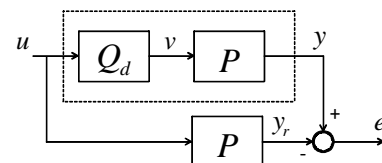


Fig. 10 Error system with input quantizer

以下の問題が得られる．

[問題 4] 次の $\tilde{\psi}_{\max}^*$ (> 0) を求めよ．

$$\tilde{\psi}_{\max}^* = \min_{X>0, \beta} \tilde{\psi}_{\max} \quad (35)$$

subject to

$$-\begin{bmatrix} X & B_p^{-1}A_p \\ B_p^{-1}A_p & \tilde{\psi}_{\max}^2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} -(1-\beta)X & 0 \\ 0 & B_p^2X - \beta I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (37)$$

$$\beta \in [0, 1]$$

■

(36) 式において, X が大きな値であるほど $\tilde{\psi}_{\max}$ は小さく設定できる．ここで, (37) 式を満足する最大の X は $\beta = 1$ のとき $X = B_p^{-2}$ であるから, (36) 式を満足する $\tilde{\psi}_{\max}$ の最小値は次式で与えられる．

$$\tilde{\psi}_{\max}^* = |A_p| \quad (38)$$

よって, (29) 式より量子化幅 d^* は次式で与えられる．

$$d^* = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{M - |A_p|} \quad (39)$$

さらに次の系が成り立つ．

【系】 1 次の動的量子化器パラメータ $\{A_p, B_p, -B_p^{-1}A_p\}$ に対し, 次式が成り立つ．

$$d^{opt} = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{M - |A_p|} \quad (40)$$

【証明】付録 A 参照． □

系より, (33) 式の動的量子化器については最適量子化幅が求まることがわかる．すなわち, この場合には d^{opt} より小さな量子化幅を設定すると, 信号レベル数が M を超える入力 $u(k)$ が必ず存在する．(40) 式において, $|A_p| < 1, M \geq 2$ に注意すると, レベル数 M が大きいほど d^{opt} と d_{st}^{opt} の比が 1 に近づくことがわかる．

4.3 静的量子化器との比較による出力性能解析

ここでは, 静的量子化器との評価関数 $E(Q_d)$ に関する性能比較を考える．まず, 系および文献 15) の結果を用いると以下の解析解を導くことができる．

《定理 3》 信号レベル数 M に対する静的量子化器と動的量子化器との性能差は次式で特徴付けられる．

$$E(Q_{st}) = \frac{M - |A_p|}{M(1 - |A_p|)} E(Q_d^*) \quad (41)$$

【証明】付録 B 参照 □

このとき, (41) 式から M によらず次の関係が導かれる．

$$\frac{E(Q_{st})}{E(Q_d^*)} = \frac{M - |A_p|}{M(1 - |A_p|)} (> 1) \quad (42)$$

ここで, (42) 式より必ず $E(Q_d^*)$ の方が小さな値となり, 通信制約の意味で必ず動的量子化器の方が性能が良いと確認できる．また, M が十分大きい場合には静的な量子化に起因する信号レンジに比べ, 動的量子化に起因する信号レンジが十

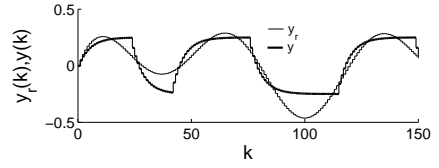


Fig. 11 Output by static quantizer with d_{st}^{opt}

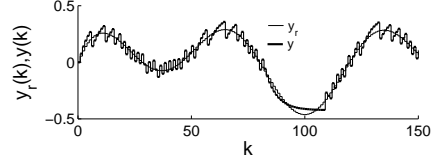


Fig. 12 Output by dynamic quantizer with d^{opt}

分小さくなり, (42) 式の比が $1/(1 - |A_p|)$ に近づく．このような場合には特に動的量子化を行うことの効果が顕著に現れることが定理 3 からわかる．

さらにここでは, 静的量子化器との性能比較に関する数値例を示す．ここでは, 1 サンプリグあたり 1 ビット送信可能な通信路を想定することで信号レベル数を $M = 2^1 = 2$ と設定し, $u_{\min} = -1, u_{\max} = 1$ とする．制御対象は $P(s) = 1/(s+2)$ をサンプリグ時間 $\Delta T = 0.1$ [s] で零次ホールドにより離散化したものであり, Q_d^* のパラメータは以下で与えられる．

$$\left(\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline -B_p^{-1}A_p & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0.819 & 0.0906 \\ \hline -9.03 & \end{array} \right)$$

よって, 最小の量子化幅 d^{opt} は

$$d^{opt} = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{M - |A_p|} = 1.69 \quad (43)$$

となる．また, 静的量子化器の場合での量子化幅は $d_{st}^{opt} = 1$ である．このとき, 定理 3 より $E(Q_{st})/E(Q_d^*) = 3.26$ となることから Q_d の方が良い応答となると期待できる．ここで, 入力 $u(k) = 0.4 \sin(0.05k) + 0.6 \cos(0.1k)$ を印加した場合の Fig. 10 のシステムにおける出力応答をそれぞれ Fig. 11, 12 に示す．Fig. 11 が静的量子化器の場合, Fig. 12 が動的量子化器の場合である．数値例においても, 動的量子化器の方が誤差 $e(k)$ が小さく, 同じ信号レベル数で動的量子化器が優れた制御性能を発揮していることがわかる．

なお, ここでは示していないが d^{opt} よりも少し小さな量子化幅 $d = 1.6$ の場合の $v(k)$ では信号レベル数は $3 (> M)$ となることを確認しており, レベル数の制約を満たしていない．

5. 考 察

5.1 従来研究との関連性

本節では, 量子化幅, ゲイン制約に着目した従来研究との関連性および差異について考察を与える．

量子化幅に着目した研究として, 文献 21) が挙げられる．文献 21) では, 量子化幅を変数として扱うことで大域的漸近安定化問題を扱っている．しかし, 量子化幅が固定値でない

ことに起因して、通信制御系に実装する場合にはエンコーダ側とデコーダ側で量子化幅の値についての合意を取る必要があるため通信制御には適さないと考えられる。一方、本論文は、最適な固定量子化幅を求める問題である点で異なる。

また、動的量子化においてゲイン制約を扱った研究として、文献 11), 16) が挙げられる。量子化器 v のゲインが制約され、かつ量子化幅が固定の場合には、そこから通信容量を見積もることもできるため、これらの研究と本研究とは関連性が深い。しかし、通信制約をベースとして量子化幅の設計問題を扱っている本研究とは研究の目的が異なっている。

このとき、文献 11) は安定化問題の枠組みであり、フィードフォワード制御系への拡張は困難である。また、文献 16) が無限区間の最適化問題を有限区間の問題に緩和する枠組みであるのに対し、不変集合に基づく本論文の設計は必ず通信容量制約を無限区間で満足する。

5.2 フィルタ部と量子化部の同時設計

本論文では動的量子化器のパラメータ行列 $\{A, B, C\}$ は与えられているものとし、動的量子化器中の静的量子化部分での量子化幅 d の設計手法を与えた。このとき、第 3.3 節の量子化器 2 の結果からわかるように、よりよい量子化性能を求めるためには d を固定して $\{A, B, C\}$ を求める問題設定だけでは不十分であり、 d も同時に考慮した設計が必要となる。

M が小さな値の場合には、量子化器のパラメータ行列 $\{A, B, C\}$ の設計には制御出力に与える影響を考慮すると同時に、外生信号によって駆動されるシステムの振幅を解析し、これに基づいて設定する必要があることが本論文の結果から結論付けられる。具体的には、出力に関する評価 (32) 式および問題 3 を同時に扱う設計問題を考えて解くことが設計問題において必要と考えられる。それぞれ d の係り方が複雑であるが、例えば $\tilde{\psi}_{\max}$ をある大きくない値に固定すれば、以下の設計問題を与えることができる。

[問題 5] 次の $A^{opt}, B^{opt}, C^{opt}$ を見つけよ。

$$\{A^{opt}, B^{opt}, C^{opt}\} = \arg \min_{\{A, B, C\}} E(Q_d) \quad (44)$$

subject to

$$- \begin{bmatrix} X & C^T \\ C & \tilde{\psi}_{\max}^2 \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} (A+BC)^T X (A+BC) - (1-\beta)X & (A+BC)^T X B \\ B^T X (A+BC) & B^T X B - \beta I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\beta \in [0, 1 - \rho(A+BC)^2]$$

問題 5 は解くことが難しい問題であるが、何らかの形で適切な解を見つければ、信号レベル数を考慮した動的量子化器が得られる。この効率的な解法や問題設定等については今後検討すべき課題である。

一方、 M が十分大きな場合には動的量子化によって量子化幅の増加率は小さくなる。そのため $\{A, B, C\}$ と d の設計

を独立に行っても大きな問題にはならないと考えられる。

6. ま と め

本論文では、通信容量制約のあるフィードフォワード制御系において、通信可能な信号レベル数を陽に考慮した最小量子化幅の決定手法を提案した。補助変数 $\tilde{\psi}$ を用いることにより量子化幅 d を含まない LMI 最適化問題に帰着させ、その解を用いて量子化幅 d^* を決める設計構造となっている。提案手法を用いることで、信号のレンジさえ既知であれば、最小の量子化幅を設定できるため、フィードフォワード型の通信制御において、量子化誤差による制御性能の劣化を抑制することができる。また、導出した $\tilde{\psi}_{\max}^*$ は動的量子化に起因する信号の振幅を示す評価指標となり、この値が小さくなる量子化器のパラメータ行列 $\{A, B, C\}$ の導出が通信制御においては重要となる。

さらに、導いた LMI 最適化問題を利用することで、特別な場合について最小量子化幅を設定できることを示し、信号レベル数制約下での静的量子化器との性能差に関する解析解を導いた。これにより、動的量子化がどのような場合に効果的かの指針を示せたこととなる。今後、第 5.2 節を展開することで、通信容量と制御性能との相互の関連性をより詳細に解析できると考えている。

謝辞 不変集合に関する有益なご教示を頂きました京都大学の太田快人教授に感謝致します。また、本研究の位置付けを明確にする上で貴重なご助言を頂きました査読者の皆様へ感謝致します。

参 考 文 献

- 1) P. Antsaklis and J. Baillieul (eds.): Special issue on networked control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49-9**, 1421/1423 (2004)
- 2) 石井 秀明: ネットワーク化制御: 通信がもたらす制御の新展開, 計測と制御, **47-8**, 627/636 (2008)
- 3) 石井 秀明: ネットワークを介した制御: 帯域制限と量子化, システム/制御/情報, **48-8**, 303/308 (2004)
- 4) 津村, 石井: 量子化信号を含む制御系の安定化・システム同定, 計測と制御, **44-1**, 70/77 (2005)
- 5) W. S. Wong and R. W. Brockett: Systems with finite communication bandwidth constraints-Part I: State estimation problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42-9**, 1294/1299 (1997)
- 6) W. S. Wong and R. W. Brockett: Systems with finite communication bandwidth constraints-Part II: Stabilization with limited information feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44-5**, 1049/1053 (1999)
- 7) S. Tatikonda and S. Mitter: Control under communication constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49-7**, 1056/1068 (2004)
- 8) 新銀, 太田: 量子化したフィードバックによる外乱抑制, 計測自動制御学会論文集, **43-8**, 641/645 (2007)
- 9) 新銀, 太田: 通信容量の制約をともなう外乱抑制, 計測自動制御学会論文集, **43-9**, 806/811 (2007)
- 10) H. Inose, Y. Yasuda and J. Murakami: A Telemetry System by Code Modulation- Δ - Σ Modulation, *IRE Transactions on SET*, **8-3**, 205/209 (1962)
- 11) D. E. Quevedo, G. C. Goodwin, and J. A. De Dona: Finite

constraint set receding horizon quadratic control, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 14-4, 355/377 (2004)

- 12) S. Azuma and T. Sugie: Optimal Dynamic Quantizers for Discrete-Valued Input Control, Automatica, 44-2, 396/406 (2008)
- 13) 東, 杉江: 離散値入力型制御のための最適動的量子化器の安定性, 計測自動制御学会論文集, 43-12, 1136/1143 (2007)
- 14) 南, 東, 杉江: 離散値入力型フィードバック制御における最適動的量子化器, 計測自動制御学会論文集, 43-3, 227/233 (2007)
- 15) 岡島, 松永, 川路: 設計自由度を陽に含む動的量子化器, 計測自動制御学会論文集, 44-5, 458/460 (2008)
- 16) S. Azuma and T. Sugie: Synthesis of optimal dynamic quantizers for discrete-valued input control, IEEE Transactions on Automatic Control, 53-9, 2064/2075 (2008)
- 17) H. Okajima, T. Umemoto, N. Matsunaga and S. Kawaji: Analysis of Dynamic Quantizer in 2-DOF Internal Model Control System, Proc. of ICROS-SICE '09, 4380/4383, (2009)
- 18) 岡島, 梅本, 松永, 川路: むだ時間を有する2自由度IMCにおける動的量子化器の構成, 計測自動制御学会論文集, 46-3, 149/156 (2010)
- 19) 小泉, 宮川: 現代デジタル通信方式, オーム社 (1981)
- 20) 新銀, 太田: 離散時間システムに対する最適不変集合-有界入力に対する可到達集合の近似-, 計測自動制御学会論文集, 40-8, 842/848 (2004)
- 21) R. W. Brockett and D. Liberzon: Quantized feedback stabilization of linear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 45-7, 1279/1289 (2000)

《付 録》

A. 系の証明

ここでは $d^{opt} = d^*$ を示す。まず, Q_d^* に関して (19), (20) 式より $\tilde{\psi}$ は次式で駆動される。

$$\tilde{\xi}(k+1) = B_p w(k) \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{\psi}(k) = B_p^{-1} A_p \tilde{\xi}(k) \quad (\text{A.2})$$

よって, $\tilde{\psi}(k)$ の可到達集合は $A_p w(k)$ の可到達集合, すなわち $\tilde{\psi}(k) \in [-|A_p|, |A_p|]$ となることがわかる。このとき, $d^* = (u_{\max} - u_{\min}) / (M - |A_p|)$ より

$$M d^* = u_{\max} - u_{\min} + |A_p| d^* \quad (\text{A.3})$$

が成立しており, d^* は信号レベル数の制約を満足する。

なお, $(M - |A_p|) d^* = u_{\max} - u_{\min}$ および $M \geq 2, |A_p| < 1$ より $d^* < u_{\max} - u_{\min}$ が成り立つ。よってこの場合には, 各時刻 k で $w(k) \in (-1, 1]$ となる任意の $w(k)$ を与えるような $u(k)$ が存在する。このことに注意し, 以下で $d^{opt} < d^*$ が存在しないことを示す。

まず, $d^{opt} < d^*$ と仮定する。ここで, $M - |A_p| > 0, d^{opt} < d^*$ および (A.3) 式より次式が成り立つ。

$$M d^{opt} < u_{\max} - u_{\min} + |A_p| d^{opt} \quad (\text{A.4})$$

一方, $d^{opt} < d^* < u_{\max} - u_{\min}$ より, $w(k)$ は各時刻で $(-1, 1]$ の任意の値をとりうる。よって, 量子化幅を d^{opt} に設定した場合も d^* の場合と同様, (A.1), (A.2) 式における $\tilde{\psi}$ のレンジは $(-|A_p|, |A_p|]$ となる。よって, d^{opt} の量子化

幅での信号レンジ幅は

$$\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} = u_{\max} - u_{\min} + |A_p| d^{opt} \quad (\text{A.5})$$

と与えられる。よって, (A.4) 式に (A.5) 式を代入すると次式が成り立つ。

$$M d^{opt} < \bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} \quad (\text{A.6})$$

これはすなわち, 静的量子化器部分で扱える信号レンジよりも印加される信号のレンジが大きいことを意味する。この場合には, 信号レベル数の制約を満たさない。よって, $d^{opt} < d^*$ とならない。以上, d^* は信号レベル数の制約を満たす最小の量子化幅である。

B. 定理3の証明

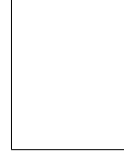
文献15)より, ある量子化幅 d_{st} での静的量子化器の性能 $E(Q_{st})$ が次式で与えられる。

$$E(Q_{st}) = \frac{|C_p B_p| d_{st}}{1 - |A_p|/2} \quad (\text{B.1})$$

一方, 量子化幅 d に対する動的量子化器の性能 $E(Q_d)$ は (34) 式で与えられる。このとき, それぞれ $d_{st}^{opt} = (u_{\max} - u_{\min}) / M, d^{opt} = (u_{\max} - u_{\min}) / (M - |A_p|)$ を代入して整理することで (41) 式が得られる。

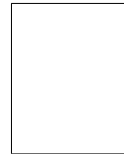
[著者紹介]

岡島 寛 (正会員)



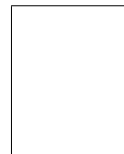
1980年5月23日生。2004年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了。2007年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士後期課程修了。熊本大学自然科学研究科助教となり現在に至る。制御性能限界の解析, 量子化に関する研究に従事。博士(工学)。システム制御情報学会の会員。

松永 信智 (正会員)



1987年熊本大学大学院工学研究科電子工学専攻修了。同年オムロン(株)中央研究所入社。93年熊本大学大学院自然科学研究科博士課程修了。博士(学術)。オムロン(株)にてロボット制御, パワーエレクトロニクス, プロセス制御などの研究に従事。2003年熊本大学工学部数理情報システム工学科助教授。2007年熊本大学自然科学研究科准教授となり現在に至る。メカトロニクス制御, プロセス制御系の設計などの研究に従事。電気学会, 日本機械学会, ASME, IEEEなどの会員。

澤田 賢治 (正会員)



2006年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了。2009年同研究科機械工学専攻博士後期課程修了。電気通信大学システム工学科助教となり現在に至る。飽和を有する制御系の研究に従事。博士(工学)。システム制御情報学会の会員。