

## むだ時間を有する2自由度IMCにおける動的量子化器の構成

岡島 寛\*・梅本達也\*\*  
松永信智\*・川路茂保\*

Design of Dynamic Quantizers in Two Degree of Freedom IMC for Input-Delay Plant

Hiroshi OKAJIMA\*, Tatsuya UMEMOTO\*\*,  
Nobutomo MATSUNAGA\* and Shigeyasu KAWAJI\*

It is well known that plants with time delay are hard to be controlled by using traditional method. For this, controller with delay, such as Internal Model Control (IMC), Smith-method, have been proposed for input-delay systems. However, it would be difficult to realize the delay of controller because of memory limit of micro control unit(MCU). Also, the sampling time might be large in case of the application to the plant with large time delay, because of the limitation of the memory in MCU. Hence, the trade-off exists between sampling time and maximum quantizing error, and the assignment of the quantizer affects the quantization error. In this paper, dynamic quantizers are designed for achieving small quantizing error for input-delay control systems in MCU system. Also, the attainable performance caused by assignment of the quantizer is discussed. The effectiveness of the proposed method is shown by numerical example.

**Key Words:** dynamic quantizer, input delay, discrete time systems, 2 d.o.f IMC, closed-form expression

### 1. はじめに

むだ時間を有する制御対象は、単一フィードバックなどよく用いられる簡易な制御手法ではその応答の調整が難しく、内部モデル制御(IMC)やスミス法などが有効な手法として知られ、実システムに適用されている<sup>1)~9)</sup>。これらの手法は、制御対象のモデルを利用することでむだ時間がフィードバック項に与える影響を打ち消している。そのため、入出力関係が有理関数とむだ時間の積の形で表現され、制御系設計の見通しが良いことから、むだ時間を有する制御対象の良い過渡特性の実現に適している。

しかし、制御器内にむだ時間を有するため、Micro Control Unit(MCU)などへの実装を考える場合、むだ時間分のデータを保持するためのメモリが必要である。このとき、各時刻データのメモリサイズを  $m$ [bit]、データ数を  $N$  とすると、 $m \times N$ [bit] のメモリを用いて各時刻データをキュー構造で格納することでむだ時間を実現できる。しかし、廉価なマイコンなどメモリ容量が大きい場合や制御対象のむだ時間が長い場合には、サンプリング時間を長くすることで保存デー

タ数  $N$  は少なくできるが、制御性能が劣化する。一方、サンプリング時間を短くすると連続時間系に近い応答を得ることができるが、メモリサイズが小さいため1サンプリングごとのデータの分解能を小さくせざるを得ず、それに起因する量子化誤差が発生して制御性能が劣化する。このように、サンプリング時間と分解能はトレードオフの関係にあり、どちらかの意味での性能劣化が起こる。したがって、量子化に起因する性能劣化を少なくする工夫が必要となる。

近年、性能劣化の少ない量子化手法として、動的な量子化器が注目されている<sup>10)~15)</sup>。動的量子化器の例として、デジタル信号変換で用いられる  $\Delta\Sigma$  変調器<sup>10)</sup>、最適動的量子化器<sup>11),12)</sup>やモデル予測型量子化器<sup>14)</sup>などが提案されている。動的量子化器は、量子化誤差を次の量子化にフィードバックする構造的な特徴から、静的量子化器ほどの大きな性能劣化を生じないことが知られている<sup>11)</sup>。これらの研究では、ON/OFF型制御系やネットワークを介した制御系での離散値入力に関する考察はなされているが、前述のようにメモリ制約に起因してデータの低分解能化が必要な場合の動的量子化器の設計法については議論されていない。また、むだ時間の実装においては、メモリに保持すべき信号が量子化されていることのみが重要であり、動的か静的かに関わらず制御器内での量子化器の配置には自由度が存在する。このことは、量子化器を含む制御系において、むだ時間の直前の信号さえ量子化されるならば、どの位置にでも量子化器を配置できることを意味する。このような配置に起因する性能の差異についての研究

\* 熊本大学大学院自然科学研究科 熊本市黒髪 2-39-1

\*\* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

\* Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto-City

\*\* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto-City

(Received April 30, 2009)

は従来なされておらず、制御系の構造によりどこに量子化器を配置することが適切かは明らかではない。

そこで本論文では、むだ時間を有する制御対象に対する動的量子化器の設計法を提案するだけでなく、量子化器の配置と量子化誤差との関係についても考察する。なお、特別な場合ではあるが、静的量子化器と動的量子化器との性能差を解析的に導いている点にも本論文の意義がある。

本論文の構成は以下で表わされる。第2章では、メモリの制約と信号の量子化幅の関係と、動的量子化器の構造について示し、入力むだ時間を含むシステムへの動的量子化器の設計問題を定式化した後、設計手法を提案する。なお、ここで導く動的量子化器は相対次数が2次以上の対象システムにも適用できる。第3章で、制御器内にむだ時間を含む制御系として、2自由度IMC<sup>9)</sup>に前述の設計手法を適用する。2自由度IMCは1自由度のIMC<sup>2)-8)</sup>を拡張したもので、制御対象の有理関数部が不安定な場合も扱える点、スミス法や従来のIMCと等価な入出力関係を全て扱える点にその特徴がある。また、動的量子化器を設計の後、その量子化器を含む制御系の性能解析のために静的量子化器との比較を定量的に示す解析解を導く。最後に第4章では、2自由度IMC内での量子化器の配置パターンを変更した場合について数値例を用いてその性能解析を行う。

なお、以下で $\mathcal{N}$ は自然数の集合を、 $\mathcal{R}$ は実数の集合を表わす。

## 2. むだ時間実現の基本問題

### 2.1 量子化器を含む制御系の構成

本章では、Fig. 1において伝達関数 $F(z)/z^N$ で与えられる入力むだ時間を含むシステムの実現問題を考える。 $u$ は入力信号、 $y$ はシステムの出力である。このタイプのシステムはむだ時間を含む対象を制御する場合に制御器の内部に組み込まれており、その有効性が知られている<sup>1)-9)</sup>。ここで、 $F$ の状態空間実現を以下で与える。

$$F: \begin{cases} x_F(k+1) &= A_F x_F(k) + B_F u(k) \\ y(k) &= C_F x_F(k) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $x_F(k) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ は状態、 $A_F, B_F, C_F$ は $A_F \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 、 $B_F \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ 、 $C_F \in \mathcal{R}^{1 \times n}$ の定数行列である。また、 $C_F B_F \neq 0$ とする。これは $F$ の相対次数が1であることを意味する。さらに、 $F$ は安定かつ最小位相と仮定する。一方、 $1/z^N$ はむだ時間を表す項であり、 $N$ ステップ分のデータシフトを示す。また、 $u$ の信号レンジは与えられていると仮定する。

$F(z)/z^N$ を実現するためには $F$ の次数 $n$ の分だけでなく $N$ 個分のデータをMCUの内部で保持しなければならない。 $N \gg n$ が多の場合に成り立つことから、 $N$ 個のデータについてデータサイズの圧縮が求められる。ここでは、むだ時間を実現するために用いる全メモリを $M$ [bit]とする。このとき、各サンプリング時間に対して利用可能なメモリサイズ $m$ は

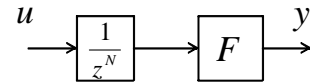


Fig. 1 the delayed system

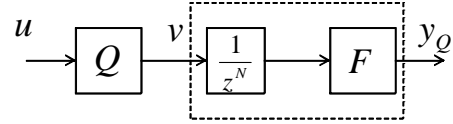


Fig. 2 the delayed system with quantizer

$$m \leq \frac{M}{N} \quad (2)$$

となるので、各時刻のデータが $m$ [bit]に収まるよう量子化を行う必要がある。 $M$ が大きくても、データ数 $N$ が大きければ各時刻のメモリサイズ $m$ は大きくできない。すなわち、制御対象のむだ時間に対してサンプリング時間 $\Delta T$ [s]が短い場合には各時刻で保持可能なデータ量が少なくなる。

次に、量子化器におけるデータの量子化幅 $d$ とすると、 $d$ は信号の振幅や $m$ の大きさから定める必要がある。もし、 $m$ が奇数、信号の中心値が0の場合、信号 $u$ は $\{0, \pm d, \pm 2d, \dots, \pm d(m-1)/2\}$ の値に丸められることとなる。量子化幅 $d$ を小さくできるか否かは信号 $u$ の振幅や $m$ に依存する。ただし、Fig. 2において $u$ を丸めることで量子化誤差 $u-v$ により元々所望としていた応答 $y$ を実現することはできず、量子化に伴う性能劣化が生じる。これに対し、動的量子化器を適切に設定すれば量子化誤差が出力に与える影響を抑えることができると知られている<sup>10)-12)</sup>。

そこで、Fig. 2のフィードフォワード系に対して量子化誤差の影響が小さい動的量子化器 $Q$ の設計問題を考える。ここで、動的量子化器の構造を以下のように与える。

$$Q: \begin{cases} \xi(k+1) &= A\xi(k) - Bu(k) + Bv(k) \\ v(k) &= Q_{stat}[C\xi(k) + u(k)] \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 $Q_{stat}[\cdot]$ は量子化幅 $d$ 、丸め型の一様静的量子化器<sup>11), 16)</sup>であり、連続値 $C\xi(k) + u(k)$ を静的量子化器に通すことで $v(k)$ は離散値を取る。ここでは、入力 $u$ の振幅、メモリサイズ $m$ 、動的量子化器のダイナミクスを考慮した上で $d$ が設定され、 $|Q_{stat}[\mu] - \mu| \leq d/2$ を満たすと仮定する。動的量子化器 $Q$ は、状態 $\xi(k)$ に過去の量子化誤差の情報 $v(k)$ をフィードバックする構造を持ち、文献10)~12)などと同じ枠組みである。なお、動的量子化器の初期状態を $\xi(0) = 0$ とする。動的量子化器の設計には $\xi(k)$ の次数設定および $\{A, B, C\}$ のパラメータ設計が必要となる。このとき、理想的にはFig. 2の出力 $y_Q$ はFig. 1の出力 $y$ に近いことが望ましい。そこで、出力 $y$ と出力 $y_Q$ との誤差を評価するシステムをFig. 3のように与える。

$Q$ が静的量子化器の場合、各時刻 $k$ での $v$ と $u$ の差が小さいが必ずしも $y$ と $y_Q$ とが近いとは限らない。その一方、動的量子化器を用いた場合は $v$ と $u$ は必ずしも近くないが、量子化が $y_Q$ に与える影響、すなわち $y - y_Q$ は小さくする

ことができる<sup>10)</sup>．所望の出力を得るために制御系を構築することが一般的であるため，制御器内での量子化の影響が出力  $y_Q$  に現れないような量子化器の設計が必要となる．よって，Fig. 3 の誤差システムに関する以下の制御問題を定式化する．  
[問題 1] Fig. 3 の誤差システムについて，以下の評価関数  $E(Q)$  を最小とする動的量子化器  $Q_{opt}$  を求めよ．

$$E(Q) := \sup_{k, u \in \ell_\infty} |y_Q(k) - y(k)| \quad (4)$$

$E(Q)$  は，任意の入力系列  $u(k)$  に対する出力誤差  $e(k)$  の最大値を評価する関数である．このとき，評価関数値  $E(Q)$  が小さくなれば，その量子化器  $Q$  は  $F(z)/z^N$  に対する良い入出力近似を与えることを意味する．なお， $N = 0$  の場合には問題 1 は文献 11) で扱われるものと同じ制御問題となる．

## 2.2 動的量子化器の最適設計

本節では問題 1 の解である最適動的量子化器  $Q_{opt}$  を設計する．このとき， $Q_{opt}$  は以下のように求められる．  
【定理 2】 問題 1 の解である最適動的量子化器  $Q_{opt}$  は次式で与えられる．

$$Q_{opt} : \begin{cases} \xi(k+1) = A_F \xi(k) - B_F u(k) + B_F v(k) \\ v(k) = Q_{stat} [-(C_F B_F)^{-1} C_F A_F \xi(k) \\ + u(k)] \end{cases} \quad (5)$$

このとき，最適評価値は次式で与えられる．

$$E(Q_{opt}) = |C_F B_F| \frac{d}{2} \quad (6)$$

【証明】 まず， $F(z)/z^N$ ， $N \geq 1$  の状態空間実現の一つは次式で与えることができる．

$$\tilde{x}_F(k+1) = \tilde{A}_F \tilde{x}_F(k) + \tilde{B}_F u(k) \quad (7)$$

$$y(k) = \tilde{C}_F \tilde{x}_F(k) \quad (8)$$

ただし，

$$\tilde{A}_F = \begin{bmatrix} A_F & B_F & 0^{n \times N-1} \\ 0^{N \times n+1} & I^{N-1 \times N-1} & 0^{1 \times N-1} \end{bmatrix}, \tilde{B}_F = \begin{bmatrix} 0^{n+N-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_F = \begin{bmatrix} C_F & 0^{1 \times N} \end{bmatrix}$$

である．このとき， $\tilde{A}_F$ ， $\tilde{B}_F$ ， $\tilde{C}_F$  について次式が成り立つことに注意する．

$$\tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+k} \tilde{B}_F = C_F A_F^k B_F, k \geq 0 \quad (9)$$

次に，文献 11) の定理 1 より，評価関数 (4) は次式となる．

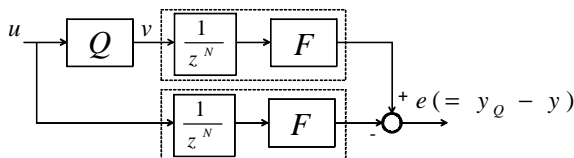


Fig. 3 error system of Fig. 1 and Fig. 2

$$E(Q) = \left( |\tilde{C}_F \tilde{B}_F| + \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{C}_F \tilde{A}_F^k \tilde{B}_F| \right) \frac{d}{2} \quad (10)$$

ただし，

$$\tilde{A}_F = \begin{bmatrix} \tilde{A}_F & \tilde{B}_F C \\ 0 & A + BC \end{bmatrix}, \tilde{B}_F = \begin{bmatrix} \tilde{B}_F \\ B \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_F = \begin{bmatrix} \tilde{C}_F & 0 \end{bmatrix}$$

である．ここで，(10) 式において  $\tilde{C}_F \tilde{B}_F = 0$ ， $\tilde{C}_F \tilde{A}_F^k \tilde{B}_F = 0$ ， $k = 1, \dots, N-1$  が成り立つ．これは，入力むだ時間により  $N$  ステップまでの評価値が零となることに対応している．さらに，任意の動的量子化器  $Q$  について  $\tilde{C}_F \tilde{A}_F^N \tilde{B}_F = C_F B_F$  が成り立つ．よって，動的量子化器のパラメータ  $\{A, B, C\}$  に関わらず  $E(Q)$  は次式を満足する．

$$E(Q) \geq |C_F B_F| \frac{d}{2} \quad (11)$$

すなわち，(11) 式は量子化器に対する性能限界を示している．次に，(5) 式の動的量子化器  $Q_{opt}$  において次式が成り立つことを示す．

$$\tilde{C}_F \tilde{A}_F^{k+N} \tilde{B}_F = 0, \forall k \geq 1 \quad (12)$$

まず， $Q_{opt}$  では  $A = A_F$ ， $B = B_F$ ， $C = -(C_F B_F)^{-1} C_F A_F$  であり， $\tilde{A}_F$  は次式で与えられる．

$$\tilde{A}_F = \begin{bmatrix} \tilde{A}_F & -\tilde{B}_F (C_F B_F)^{-1} C_F A_F \\ 0 & A_F - B_F (C_F B_F)^{-1} C_F A_F \end{bmatrix} \quad (13)$$

$k = N+1$  のとき次式が成り立つ．

$$\tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_F \tilde{A}_F^N & 0 \end{bmatrix} \tilde{A}_F = \begin{bmatrix} \tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+1} & -C_F A_F \end{bmatrix}$$

一方，ある  $k = \tau \geq 1$  について次式が成り立つと仮定する．

$$\tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+\tau} & -C_F A_F \end{bmatrix} \quad (14)$$

このとき，(13) 式より次式が成り立つ．

$$\tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+\tau+1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+\tau} & -C_F A_F \end{bmatrix} \tilde{A}_F \\ = \begin{bmatrix} \tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+\tau+1} & -C_F A_F^{\tau+1} \end{bmatrix}$$

よって，数学的帰納法により任意の  $k \geq 1$  について次式が成り立つ．

$$\tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+k} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_F \tilde{A}_F^{N+k} & -C_F A_F^k \end{bmatrix} \quad (15)$$

したがって，(9)，(15) 式より (12) 式が成り立ち，(10) 式に (12) 式を代入することで次式を得る．

$$E(Q_{opt}) = |C_F B_F| \frac{d}{2} \quad (16)$$

以上より，(11) 式より (5) 式の動的量子化器により評価関数  $E(Q)$  が最小となる．□

ここで， $Q_{opt}$  の次数は  $F(z)$  の次数にのみ依存し， $N$  には依存しない点に注意する．量子化器用のメモリを考慮する必要があるため，ネットワーク系での量子化問題と異なり， $Q_{opt}$  の次数が大きくないことはメモリ制約を有する問題で

は重要であり、提案した量子化器はこの点でも有用なものとなっている．ここで得た結果を用いると、むだ時間が長い場合に  $Q_{opt}$  により量子化することでデータ保持のためのメモリ利用量を大幅に小さくできる．なお、定理 2 の最適動的量子化器は状態空間実現の取り方に工夫をすることでむだ時間の無い場合<sup>11)</sup>の自然な拡張として導かれている．

### 3. 2 自由度 IMC における動的量子化器

本章では、制御器内にむだ時間を含む制御系に対して第 2 節で求めた動的量子化器の設計手法を適用する．そのような制御系の一つとして 2 自由度 IMC<sup>9)</sup>がある．2 自由度 IMC は IMC やスミス法と同様にむだ時間を含むフィルタが制御器内に含まれる系であり、不安定な制御対象を扱えるなどの優位性を持った制御系である．ここでは 2 自由度 IMC での制御器内むだ時間の実現問題を考える．参照信号を加工して修正参照信号を生成する量子化器配置に着目し、2 自由度 IMC での動的量子化器設計問題を問題 1 の形に帰着させる．さらに、設計結果の有効性を解析解、数値例を用いて検証する．

#### 3.1 2 自由度 IMC の制御構造

制御対象は単一入出力系で、伝達関数  $P_0(z)$  およびむだ時間  $1/z^N$  ( $N \in \mathcal{N}$ ) を持ち、次式で与えられるものとする．

$$\frac{y}{u} = P(z) = P_0(z) \frac{1}{z^N} \quad (17)$$

ただし、 $u$  は入力、 $y$  は出力であり、 $P_0(z)$  は最小位相で相対次数 1 とする．また、サンプリング時間  $\Delta T$  に対し、むだ時間  $L$  は  $L = N\Delta T$  [s] となる．

(17) 式の制御対象に対し Fig. 4 の制御系を構成する．この制御系は内部モデル制御系の一つであり、 $G(z)$  と  $C_{FB}(z)$  の 2 つの設定自由度を有することから、2 自由度 IMC と呼ぶ<sup>9)</sup>．このとき、目標値信号  $r$  から  $y$  の伝達関数は次式で表わされる．

$$\frac{y}{r} = G(z) \frac{1}{z^N} \quad (18)$$

(18) 式は、フィードバック補償器  $C_{FB}(z)$  に依存しない点に注意する．フィードフォワードのフィルタ  $G$ 、 $GP_0^{-1}$  および  $PC_{FB}$  を一巡伝達関数としたフィードバック系がそれぞれ安定であれば Fig. 4 の制御系が安定となる．このとき、2 自由度 IMC は以下の特徴を有する．

- スミス法や 1 自由度 IMC で実現できる全ての入出力特性を実現可能である．
- 制御対象の有理関数部分が不安定な場合も扱える．

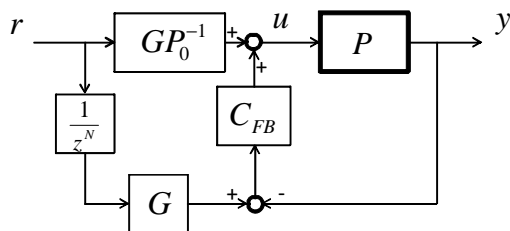


Fig. 4 2-DOF internal model control system

- 制御器内のフィードフォワード項にむだ時間が含まれる．制御系にむだ時間が含まれる意味ではスミス法、一般的な IMC と同様であるが、これらで実現できる全ての入出力関係を 2 自由度 IMC でも実現できる．また、制御対象が不安定であっても安定化可能である点はスミス法、IMC に無い特徴となっている．また、フィードフォワード項にむだ時間が含まれるため、問題 1 と近い枠組みで制御問題を扱えると予想される．このように、2 自由度 IMC は有用な制御構造である．

以降において、2 自由度 IMC における目標入出力伝達関数  $G(z)$  は与えられるものとし、 $P_0(z)$  と同様に最小位相で相対次数 1 とする．そして、その状態空間実現を

$$G : \begin{cases} x_G(k+1) = A_G x_G(k) + B_G r(k) \\ y(k) = C_G x_G(k) \end{cases} \quad (19)$$

とする．ただし、 $x_G \in \mathcal{R}^{n_G \times 1}$  は状態、 $A_G \in \mathcal{R}^{n_G \times n_G}$ 、 $B_G \in \mathcal{R}^{n_G \times 1}$ 、 $C_G \in \mathcal{R}^{1 \times n_G}$  はそれぞれ定数行列である．

#### 3.2 動的量子化器の設計

本節において、動的量子化器を含む制御系として Fig. 5 を考え、制御系 1 と名付ける．Fig. 5 における  $1/z^N$  の項には離散値信号  $r_q$  が印加される．Fig. 5 は参照信号  $r(k)$  を量子化して新たな参照信号  $r_q(k)$  を構成する制御系と考えることができる．また、 $r_q$  から  $y_1$  までの関係は (18) 式で表わされる．よって、Fig. 2 の  $F(z)$  を  $G(z)$  に置き換えることで、Fig. 5 は Fig. 2 の形式で等価的に表現できる．さらに、Fig. 4 との誤差システムを考えれば、 $y_1 - y$  を小さくする動的量子化器  $Q_1$  の設計問題は、問題 1 の形に帰着される．

従って、第 2.2 節の設計手法を用いると  $y_1(k) - y(k)$  を出力とする誤差システムに対する最適動的量子化器は以下のよう求められる．

$$Q_1^* : \begin{cases} \xi(k+1) = A_G \xi(k) - B_G r(k) + B_G r_q(k) \\ r_q(k) = Q_{stat} [-(C_G B_G)^{-1} C_G A_G \xi(k) + r(k)] \end{cases} \quad (20)$$

このとき、 $Q_1^*$  を用いた場合の誤差  $y_1(k) - y(k)$  の  $\ell_\infty$  ノルムは

$$E(Q_1^*) = |C_G B_G| \frac{d}{2} \quad (21)$$

となる．文献 11) では  $P(z)$  の特徴に基づいて  $E(Q_{opt})$  が決まるのに対し、本手法では  $G(z)$  に基づいて決まる．なお、設計者が  $G(z)$  を高次にならないように与えることにより、動

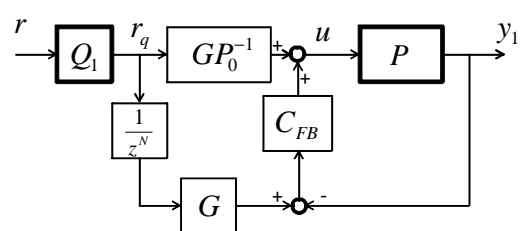


Fig. 5 control system 1

的量子化器も高い次数にならない。

### 3.3 静的量子化器との比較による性能解析

$G(z)$  の次数が 1 次の場合は, 制御系 1 に静的量子化器を配置した場合と性能解析による比較が可能である。

《定理 3》  $G(z)$  が 1 次系で与えられる場合, 静的量子化器の性能  $E(Q_{stat})$  と  $E(Q_1^*)$  との間に次の関係が成り立つ。

$$E(Q_{stat}) = \frac{1}{1 - |A_G|} E(Q_1^*) \quad (22)$$

ただし,  $A_G$  は目標伝達関数  $G(z)$  の極である。

【証明】文献 11) の定理 1 より,  $G(z)$  が 1 次の場合には次式が得られる<sup>15)</sup>。

$$\begin{aligned} E(Q_{stat}) &= \left( |C_G B_G| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_G A_G^k B_G| \right) \frac{d}{2} \\ &= \frac{|C_G B_G| d}{(1 - |A_G|) 2} \end{aligned} \quad (23)$$

よって, (21) 式を (23) 式に代入することで (22) 式が得られる。□

定理 3 は, 動的量子化器と静的量子化器との最大誤差に関する性能差を解析的に表現している。(22) 式および  $|A_G| < 1$  より, 静的量子化器の方が  $Q_1^*$  よりも  $E(Q)$  の評価関数値の意味で性能が悪いことがわかる。特に, サンプリング時間を短くすると離散システムの  $A_G$  行列 (この場合はスカラー値) が 1 に近づくとき, (22) 式において  $1/(1 - |A_G|)$  が大きな値となる。これは, 定理 3 は短いサンプリング時間の制御を行う場合には, 静的量子化器の代わりに動的量子化器を用いる効果が顕著に現れることを意味している。例えば,  $1/(s+1)$  で与えられる目標入出力伝達関数を 0.1 秒, 0.01 秒でそれぞれ離散化した  $G(z)$  では,  $E(Q_{stat})/E(Q_1^*)$  はそれぞれ 10.5, 100.0 となり, 0.01 秒で離散化した場合に性能差が大きいことがわかる。

### 3.4 数値例を用いた $Q_1^*$ の考察

不安定な制御対象  $P_0(s) = 1/(s - 0.9)$  およびむだ時間  $L = 1[s]$  で, 目標伝達関数が  $G(s) = 1/(s + 0.5)$  で与えられ, サンプリングタイム  $\Delta T = 0.1$  で離散化することで伝達関数  $P(z)$ ,  $G(z)$  が与えられた場合を考える。このとき, データ数は  $N = 10$  となる。また, 量子化器の量子化幅  $d = 1$  と, フィードバック系の安定性から  $C_{FB} = 0.95$  とする。ここでは, 2 つの数値例により提案手法の有効性を検証する。

#### 3.4.1 参照信号と量子化器の出力

まず, 参照信号  $r$  を 0.25, 0.5, 0.75 のステップ目標値とした場合の量子化後の参照信号  $r_q$  および制御系の出力  $y_1$  をそれぞれ Fig. 6~9 に示す。ただし, Fig. 6~8 は 5 秒間, Fig. 9 は 15 秒間の応答を図示している。Fig. 6~8 より  $r_q(k)$  は 0 か 1 しか取らないため, 1 サンプリングあたり 1[bit] しかメモリは必要でない。また,  $r$  が大きいほど 1 となる割合が多いことがわかる。ここでは,  $N = 10$  であるため,  $M = 10[\text{bit}]$  のメモリがあればむだ時間を実現できる。一方, それぞれの目標値  $r$  について, 量子化を含まない系の出力  $y$  (細線) と

制御系 1 の出力  $y_1$  (太線) が近い応答波形となっていることが確認できる (Fig. 9)。

#### 3.4.2 パディ近似との比較

パディ近似はむだ時間の有理関数近似によく用いられる近似手法であるが, 制御系 1 と  $e^{-Ls}$  をパディ近似<sup>3)</sup>した有理関数を離散化して  $1/z^N$  の代わりに用いた場合と比較は意義深い。Fig. 10 に  $r = 0.75$  の場合の Fig. 5 の出力誤差 (細線) と 1 次のパディ近似を用いたシステムの出力誤差 (太線) を示す。ただし,  $C_{FB}$  は取り得る範囲の中でパディ近似の応答が一番良くなるように試行錯誤的に設定した ( $C_{FB} = 0.95$ )。一方,  $G(z)$  に対する動的量子化器より評価値  $E(Q_1^*) = 0.0488$  が求まるが, Fig. 10 では  $Q_1^*$  を用いるときの誤差  $e(k)$  は 0.0488

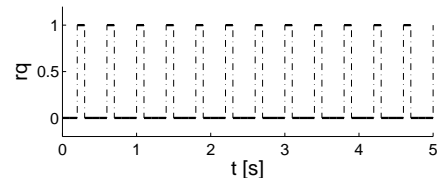


Fig. 6 quantized signal  $r_q$  ( $r = 0.25$ )

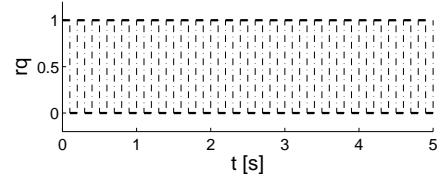


Fig. 7 quantized signal  $r_q$  ( $r = 0.5$ )

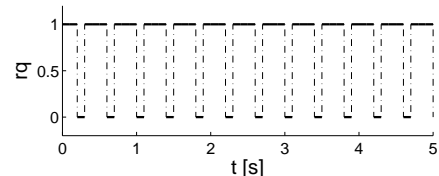


Fig. 8 quantized signal  $r_q$  ( $r = 0.75$ )

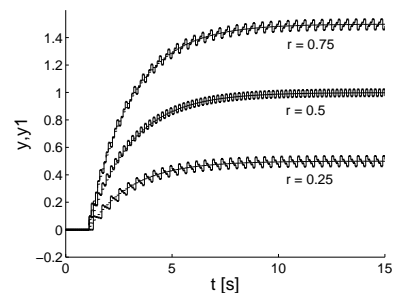


Fig. 9 outputs of Fig. 5

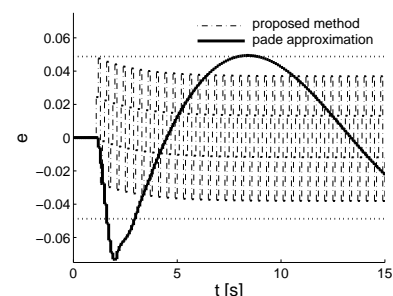


Fig. 10 control system 1 v.s. pade approximation

のライン(点線)より内側に入っていることがわかる。一方、パディ近似を用いた場合には2秒付近で制御系1よりも大きな出力誤差となっており、動的量子化器の応答の方がより元の応答を近似していることがわかる。なお、ここでは各時刻のデータを1ビットしか保持できない場合を想定した数値例を示しているが、保持可能ビット数が多い場合には量子化幅  $d$  を小さく設定できるため、量子化誤差はより小さくなる。

#### 4. 量子化器の配置による性能解析

前章では、2自由度IMCにおいて修正参照信号を生成する制御系1に対して動的量子化器の設計法を示し、数値例などを用いてその性能を解析した。しかし、2自由度IMCの構造的特徴を考えると、むだ時間  $1/z^N$  の直前に量子化器を配置する構造は他(Fig. 11, 12)にも考えることができ、その優位性は制御対象や制御器に依存すると推測される。また、最適な量子化器パラメータも量子化器の配置箇所にも依存すると考えられる。そこで本章では、前章と異なる量子化器配置を行った制御系に対する量子化器パラメータの設計法について検討し、各量子化器配置についての比較検証を行うことで量子化器配置問題についての考察を与える。

##### 4.1 制御系2に対する量子化器の設計

Fig. 11は、むだ時間を含むフィードフォワード項の目標伝達関数  $G(z)$  の前に量子化器を配置する制御構造であり、ここでは制御系2と呼ぶ。制御系1とは異なり、むだ時間を含まないフィードフォワード補償器への信号は量子化しない構造となっている。制御系2に対する量子化器の設計を考える際、量子化誤差は次式のサブシステム  $T_{y_2 r_q}$  を通って  $y_2 - y$  へ影響するといえる。

$$T_{y_2 r_q} = \frac{PC_{FB}}{1 + PC_{FB}} \frac{G}{z^N} \quad (24)$$

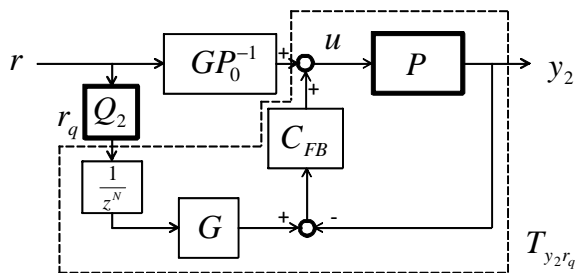


Fig. 11 control system 2

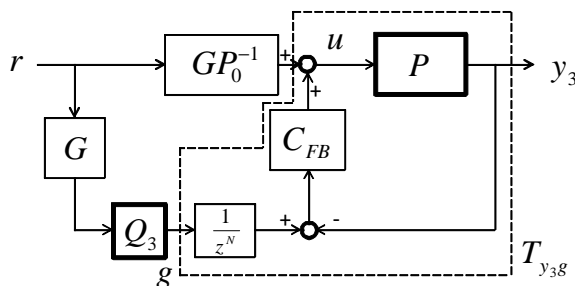


Fig. 12 control system 3

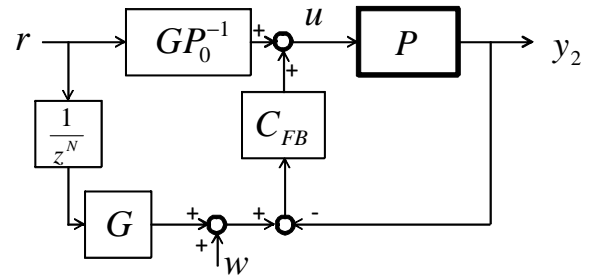


Fig. 13 equivalent system to Fig. 11

$Q_2$  の設計には2種類が考えられる。1つは、出力誤差の影響を小さくするために  $T_{y_2 r_q}$  をシステムとして問題1に帰着させる方法である。量子化器の次数は  $T_{y_2 r_q}$  の次数により決定されるが、 $P$  にもむだ時間  $1/z^N$  が含まれるため、 $T_{y_2 r_q}$  に基づいて設計した動的量子化器は必ず  $2N$  よりも大きな次数となる。そのため、量子化器の状態量を保持するために多くのメモリが必要となる。これを避けるためには、 $T_{y_2 r_q}$  を低次元化したシステム  $\tilde{T}_{y_2 r_q}$  に対する量子化器の設計や、低次元化設計<sup>15)</sup>などの工夫が必要となる。

もう1つは、フィードフォワード部分に与える量子化誤差の影響を最小化することを目的として、 $G(z)/z^N$  のシステムについて問題1に帰着させる方法である。フィードフォワード部分の誤差を小さくすることで、出力誤差  $y_2 - y$  も小さくなることが期待される。このとき、 $Q_2 = Q_1^*$  となる。この量子化器  $Q_2$  に対して制御系2はFig. 4に外乱  $w$  が印加されたシステムと等価的に扱うことができる(Fig. 13)。ただし、 $w$  の最大振幅は  $E(Q_2)$  で制約される。一方、 $w$  から  $y_2$  への伝達関数は

$$\frac{y_2}{w} = T_{y_2 w} = \frac{PC_{FB}}{1 + PC_{FB}} \quad (25)$$

で与えられるので、信号の量子化を前提としないFig. 4との違いは、 $w$  に起因する出力のみとなる。そのため、制御対象  $P(z)$  が安定ならばスモールゲイン定理より  $C_{FB}$  のゲインが小さい値でも制御系が安定となり、 $T_{y_2 w}$  の入出力関係に起因して量子化の影響は小さくなると期待される。

##### 4.2 制御系3に対する量子化器の設計

むだ時間を含むフィードフォワード項の目標伝達関数  $G(z)$  の後に量子化器を配置する制御系(Fig. 12)を制御系3とし、ここでは制御系3に対する動的量子化器  $Q_3$  の設計問題を考える。制御系1と2では参照信号  $r(k)$  を量子化しているのに対し、制御系3は  $r(k)$  を  $G(z)$  に通した信号が量子化器に印加される。その信号を  $g(k)$  とすると、 $g(k)$  から  $y_3(k)$  の伝達関数  $T_{y_3 g}(z)$  は以下で示される。

$$T_{y_3 g}(z) = \frac{PC_{FB}}{1 + PC_{FB}} \frac{1}{z^N} \quad (26)$$

前節の最初のアプローチと同様に、 $T_{y_3 g}$  のシステムを問題1に帰着させたとき、最適動的量子化器の次数は  $2N$  よりも大きな次数となる。実装においては低次の量子化器が求められることから、低次の量子化器設計のためには  $T_{y_3 g}$  を低次元化し

たシステムに対して動的量子化器を設計することや、量子化器の設計自由度<sup>9)</sup>に基づき量子化器を設計するなどの工夫が考えられる。しかし、 $T_{y3g}$  が最小位相系とは限らないため、非最小位相の場合の出力誤差と次数を考慮した設計手法が今後の課題となる。制御系3では $r(k)$ が $G(z)$ によってフィルタリングされることから、量子化器に印加される信号のクラスがあらかじめ限定されることになる。よって、そのクラスに適した量子化器設計ができれば、制御系3がより良い性能を満たす場合も考えられる。

#### 4.3 各制御系の性能比較

本節では、制御系1および制御系2に関して数値例を用いた性能比較を行う。なお、制御系2については2番目の方法における最適動的量子化器を用いた場合を考える。両制御系の動的量子化器設計には $G(z)/z^N$ を用いるため、その次数は $n_G$ となる。通常、目標伝達関数 $G(z)$ は低次のものが与えられる場合が多く、動的量子化器に必要なメモリ数 $n_G$ は大きくならないことが多い。

次に、制御系1の出力とFig.4との出力誤差は $C_{FB}$ に依存しないので $C_{FB}$ の設定と出力誤差の影響を独立に考慮することとなるのに対し、制御系2では $C_{FB}$ によって出力誤差は変化する。通常、 $C_{FB}$ はロバスト性や安定性を考慮して設定するが、安定性のみに着目すると、安定性を満たす範囲で $C_{FB}(z)$ のゲインを小さくすることで制御系2の出力誤差は小さくなる。特に、制御対象が安定な場合には $C_{FB}$ のゲインを小さくしても安定性を満足することから、制御系2では出力誤差を限りなく小さくすることができる。これに対し、制御系1は制御対象が安定であっても量子化に起因する出力誤差が現れる。

そこで、3.4節と同条件の数値例で制御系1と2を比較する。ステップ目標値を $r = 0.75$ とした場合の出力および誤差の応答をFig.14,15に示す。ただし、Fig.14において制御系1の応答はFig.9と同じ応答波形である。また、制御系2の出力および誤差を太線で示す。図より制御系2が制御系1より誤差は大きいことがわかる。

一方、制御対象が安定な場合や、不安定極の絶対値が小さな場合には小さなフィードバックゲイン $C_{FB}$ でも安定化でき、例えば、 $P_0(s) = 1/(s - 0.1)$ ,  $C_{FB} = 0.2$ とした場合にはFig.16,17のように制御系2の方が出力誤差が小さくなる。このように、制御対象の特性によって量子化器パラメータの設定だけでなく配置も変更することが出力誤差の減少に有効であるとわかる。

(注) 本論文では制御対象 $P(z)$ の相対次数を1として議論を展開したが、相対次数が2以上の場合にも同様の議論が可能である。 $P(z)$ の相対次数が $t$ のとき、 $G(z)$ の相対次数も $t$ 以下に制限される。この場合の動的量子化器設計には、以下の制御対象

$$\bar{G}(z) = z^{t-1}G(z) \quad (27)$$

の状態空間実現 $(\bar{A}_G, \bar{B}_G, \bar{C}_G)$ を用いればよい。

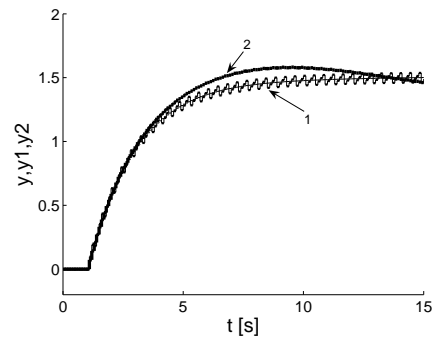


Fig. 14 outputs of control system 1 and 2 ( $P_0(s) = 1/(s - 0.9)$ )

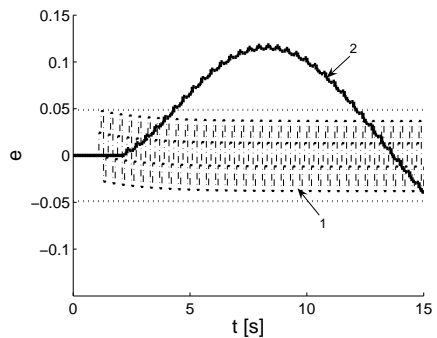


Fig. 15 errors of control system 1 and 2 ( $P_0(s) = 1/(s - 0.9)$ )

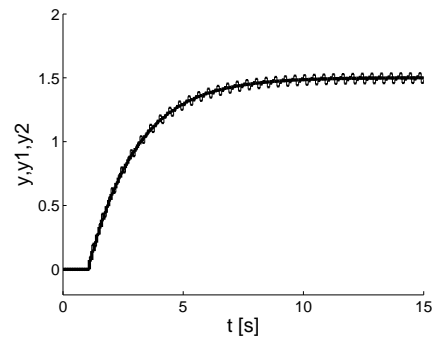


Fig. 16 outputs of control system 1 and 2 ( $P_0(s) = 1/(s - 0.1)$ )

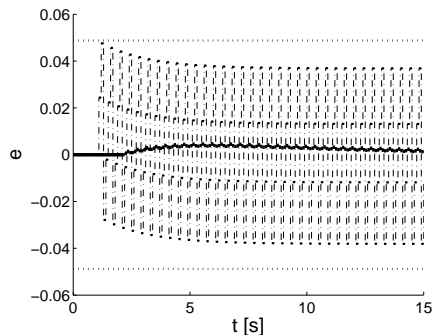


Fig. 17 errors of control system 1 and 2 ( $P_0(s) = 1/(s - 0.1)$ )

## 5. おわりに

本論文では、制御器にむだ時間を実装する方法として、動的量子化器を含む制御系の構成法を示した。まず、入力むだ

時間を有するシステムに対して最適な動的量子化器の設計手法を示した。さらに、その設計手法を2自由度IMCにおける量子化器の設計問題に適用し、量子化性能の解析を行った。その際、 $G(z)$ が1次の場合について、性能差に関する解析解を導き、動的量子化器を用いることの有効性を示した。また、制御系における量子化器の配置が異なる場合に対する設計法を示し、配置によって制御性能や量子化器の次数などが異なることを明らかにした。特に、制御系1と制御系2の配置に着目すると、 $P(z)$ が安定もしくは絶対値の小さな不安定極の場合は制御系2が出力誤差を小さくできるが、逆に絶対値が大きくな不安定極を持つ $P(z)$ の場合は制御系1の方が性能が良い。以上の結果より、制御対象と制御器の構造およびパラメータを知った上で、量子化器設計や量子化器配置を工夫することで、量子化が出力に与える影響を小さくでき、良好な性能を得ることがわかる。ここで得られた結果は、出力むだ時間を有する制御対象でも利用可能である。

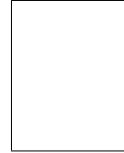
なお、むだ時間がフィードバックループに含まれる場合の設計問題は未解決であり、LFT表現に基づく方法<sup>13)</sup>の拡張が期待される。また、出力誤差と次数を考慮した動的量子化器の設計手法も今後の課題である。

#### 参考文献

- 1) O. J. M. Smith: A Controller to Overcome Dead Time, ISAJ., 6, 28/33 (1959)
- 2) 阿部, 延山: むだ時間系の制御, 計測と制御, 42-4, 316/319 (2003)
- 3) 阿部, 延山: むだ時間システム入門 1-伝達関数からのアプローチ-, 計測と制御, 44-11, 799/804 (2005)
- 4) 阿部, 市原: むだ時間系に対するIMC構造を用いた閉ループ同定と補償器の繰り返し設計, 計測自動制御学会論文集, 36-7, 563/568 (2000)
- 5) 舒, 渡部, 山田: 入力にむだ時間を含む系のロバストIMC制御, 計測自動制御学会論文集, 30-6, 735/737 (1994)
- 6) M. Morari: Robust Process Control, Prentice Hall(1989)
- 7) 渡部慶二: むだ時間システムの制御, コロナ社 (1993)
- 8) 阿部, 児島: むだ時間・分布定数系の制御, コロナ社 (2007)
- 9) 岡島, 浅井, 川路: 2自由度IMCによる入力むだ時間系の追従性能限界, 計測自動制御学会論文集, 45-6, 313/319 (2009)
- 10) H. Inose, Y. Yasuda and J. Murakami: A telemetering system by code modulation-  $\Delta - \Sigma$  modulation, IRE Trans. Space Electron. Telemetry, 8-9, 204/209 (1962)
- 11) 東, 杉江: 離散値入力型制御における最適動的量子化器, システム制御情報学会論文誌, 20-3, 122/129 (2007)
- 12) 南, 東, 杉江: 離散値入力型フィードバック制御における最適動的量子化器, 計測自動制御学会論文集, 43-3, 227/233 (2007)
- 13) Y. Minami, S. Azuma and T. Sugie: An optimal dynamic quantizer for feedback control with discrete-valued signal constraints, Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2259/2264 (2007)
- 14) D. E. Quevedo and G. C. Goodwin: Audio quantization from a receding horizon control perspective, Proceedings of the 2003 American control conference, 4131/4136 (2003)
- 15) 岡島, 松永, 川路: 設計自由度を陽に含む動的量子化器, 計測自動制御学会論文集, 44-5, 458/460 (2008)
- 16) 小泉, 宮川: 現代デジタル通信方式, オーム社 (1981)

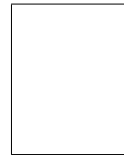
#### [著者紹介]

##### 岡島 寛 (正会員)



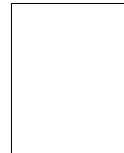
1980年5月23日生。2004年3月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了。2007年4月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士後期課程修了。熊本大学自然科学研究科助教となり現在に至る。車両の運動制御, 制御性能限界の解析, 動的量子化器の設計・解析に関する研究に従事。博士(工学)。システム制御情報学会の会員。

##### 梅本 達也



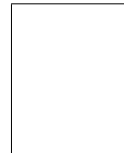
2004年4月熊本大学環境システム工学科, 建築系入学。2006年4月同大学情報システム工学科編入学。2009年3月同大学同学科卒業。現在, (株)富士通九州システムエンジニアリング勤務。

##### 松永 信智 (正会員)



1987年熊本大学大学院工学研究科電子工学専攻修了。同年オムロン(株)中央研究所入社。93年熊本大学大学院自然科学研究科博士課程修了。博士(学術)。オムロン(株)にてロボット制御, パワーエレクトロニクス, プロセス制御などの研究に従事。2003年熊本大学工学部数値情報システム工学科助教授。2007年熊本大学自然科学研究科准教授となり現在に至る。メカトロニクス制御, プロセス制御系の設計などの研究に従事。電気学会, 日本機械学会, ASME, IEEEなどの会員。

##### 川路 茂保 (正会員)



1969年熊本大学大学院工学研究科電気工学専攻修了。同年同工学部助手, 同助教授を経て, 88年同教授, 99年~2009年, 大学院自然科学研究科教授。現在, 熊本大学名誉教授, (株)システムインテグレーション研究所代表取締役社長。この間, 94~95年カリフォルニア大学バークレイ校, ハーバード大学等の客員研究員。ロバスト制御理論とメカニカルシステムへの応用, インテリジェント制御系の構築, ロボティクスなどの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会常任理事, システムインテグレーション部門長などを歴任。計測自動制御学会技術賞受賞。電気学会上級会員, 日本機械学会フェロー, 日本人間工学会, IEEEなどの会員, 当会フェロー。