

2自由度IMCによる入力むだ時間系の追従性能限界

岡島 寛*・浅井 徹**・川路 茂保*

Tracking Performance Limitation for Plants with Input Delay in 2-DOF Internal Model Control Systems

Hiroshi OKAJIMA*, Toru ASAI** and Shigeyasu KAWAJI*

In this paper, tracking performance limitations for plants with input delay are considered. It is important to know the performance limitations for plants to design controllers and to design plants. Our objective is to find the fundamental limitation of the transient response in tracking control problem. When plant have input delay, no one would deny that tracking performance becomes worse than the plants without input delay. However performance limitations for such plants have not been derived analytically. We derive the performance limitations based on internal model control framework. The difference between plants with delay and without delay is compared by numerical examples.

Key Words: performance limitations, reference tracking, non-minimum phase systems, input delay, optimal control

1. はじめに

制御理論の研究において、様々な仕様や目的に対する制御器の設計手法を整えることは重要であるが、“これ以上の性能は達成できない”という制御性能の本質的な限界を明らかにすることも重要である。この本質的な限界を知ることで、ある設計手法によって構成された制御系の性能が、それで十分か否かを評価することができる。このような背景から、制御系で達成可能な制御性能の限界を制御対象のパラメータ（不安定極や不安定零点など）の関数として解析的に求める研究がなされている^{1)~7)}。具体的には、評価関数に関する最適制御問題を考え、評価量の最適値を制御対象パラメータに関する閉形式解として導出している。最適値を求めることのみが目的である場合はLMIなどを用いて数値的に求めることが考えられるが、パラメータの関数として最適値を表すことは制御対象を制御しやすいものに変更するための指針にもなるため有用である。すなわち、パラメータの関数として求めた最適値によって制御対象の極や零点のどのような配置が制御性能の改善につながるかの指針が得られる。従来研究では、連続時間系でステップ参照信号に対して出力誤差の L_2 ノルムの下限値が閉形式解として導出されている¹⁾のをはじめとし、

参照信号が正弦波の場合^{4),6)}や、偏差だけでなく、制御入力のおおきさも評価関数に用いた場合²⁾、参照信号の予見を利用する結果³⁾も導出されている。

これに対し本論文では、入力むだ時間を有する制御対象について追従制御問題を考え、追従性能の限界を解析的に導出する。制御対象が入力むだ時間を持つ場合、むだ時間の長さ分だけ制御出力は零をとる。そのため、フィードバック制御系の設計が難しく、例えば単一フィードバック系において制御器を設計する場合には、ループゲインを大きくすると不安定化するため速い過渡応答が困難なことが知られている。さらに、むだ時間だけでなく不安定零点も持つ制御対象の場合には、より制御することが困難となり、むだ時間に起因する性能の劣化と不安定零点に起因する性能の劣化がそれぞれ応答に現れ、設計が困難なものとなる⁵⁾。このような難しい制御対象においては、特に、性能限界を見積もることが重要となる。

他方、入力むだ時間系に対する有効な制御手法としてスミス法や内部モデル制御(IMC)が知られている。これらの手法では、むだ時間を含む制御対象のモデルを利用することでむだ時間がフィードバックに与える影響を打ち消しており、その入出力伝達関数がむだ時間と有理関数との積で表わされるため、設計の見通しがよい。そのため、入力むだ時間を有する制御対象に対して有効な制御系として広く用いられている。本論文では、IMCを拡張した2自由度IMCを考え、その制御系における出力誤差の下限値を導出する。2自由度IMCは、通常のIMCやスミス法で実現できる全ての入出力伝達関数を表現できる点、不安定極を持つ制御対象も扱える点に

* 熊本大学自然科学研究科 熊本市黒髪 2-39-1

** 大阪大学工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University, Kurokami, Kumamoto-City

** Graduate School of Engineering, Osaka University, Yamadaoka, Suita-City

(Revised February 15, 2007)

その特徴があり、有用な制御系と考えられる。

著者らは先に⁶⁾、入力むだ時間のない制御対象に対し2自由度制御系で達成可能な追従性能限界を導出した。この結果において、参照信号としてステップや正弦波など広いクラスの信号に対する追従性能限界を統一的に求めている。そこで本論文では、2自由度IMCの入出力伝達関数が有理関数とむだ時間の積で表わされる点に着目し、誤差の L_2 ノルムの評価区間を分割することにより、文献6)に近い枠組みで制御問題を考える。この結果、参照信号が単位ステップの場合だけでなく正弦波を含む広いクラスの信号を扱うことができる点に本論文の特徴がある。

本論文の構成は以下で表わされる。第2章で制御対象、2自由度IMCおよび参照信号のクラスを設定し、追従制御問題を定式化する。次に第3章で主結果として追従誤差の L_2 ノルムの下限値を解析的に導く。ここでは、信号の評価区間の分割に基づいて制御出力の集合を導出し、むだ時間分信号をシフトさせることで通常の H_2 最適化問題に帰着させ下限値を導出する。最後に、第4章で数値例題を用いて結果の考察を行う。特に、数値例では文献5)の入力むだ時間を有する制御対象を単一フィードバック系で制御する場合の結果との比較も行う。

以下、信号 $u(t)$ のラプラス変換 \mathcal{L} を $\mathcal{L}[u(t)] = \hat{u}(s)$ と書く。集合 L_∞ は次式の信号空間である。

$$L_\infty = \{u(t) : \sup_t |u(t)| < \infty\}$$

$\|u\|_2$ は $u(t)$ の L_2 ノルム

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &= \left(\int_0^\infty u(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{u}(-j\omega)\hat{u}(j\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。また、 S はプロパーかつ閉右半平面で解析的な有理関数の集合である。

2. 問題設定

入力むだ時間を持つ制御対象の入出力伝達関数を次式で与える。

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = P(s)e^{-Ls} \quad (1)$$

ただし、 $y(t)$ は制御出力、 $u(t)$ は制御入力、 L はむだ時間長さである。ここで $P(s)$ を

$$P(s) = P_0(s) \prod_{i=1}^{m_p} (s - z_i) \quad (2)$$

と表わす。ただし、 $P_0(s)$ は全ての零点が安定な伝達関数で、 z_1, \dots, z_{m_p} は $P(s)$ の不安定零点である。 z_i は全て異なり、その実部は正、すなわち、

$$z_i \neq z_j \quad \forall i \neq j, \operatorname{Re}(z_i) > 0 \quad \forall i \quad (3)$$

とする。さらに、 $P(s)$ の相対次数を $h_p (\geq 0)$ と表記する。

本論文では、Fig. 1に示す構造の制御系を提案し、この制御系を用いた追従制御を考える。Fig. 1は制御器内に制御対象の逆モデルを含むことから内部モデル制御系^{12)~15)}の一種となっており、制御対象 $P(s)\exp(-Ls)$ に信号 $G(s)P(s)^{-1}\hat{r}$ を通した信号の影響を $G(s)\exp(-Ls)$ によって打ち消している。さらに、 $G(s)$ によって入出力特性を、 $C_{FB}(s)$ によってフィードバック特性を独立に調整できる制御構造である。また、2自由度制御系¹⁶⁾にむだ時間を付加した構造と考えることもできる。そのため、ここではFig. 1の制御系を2自由度内部モデル制御系(2自由度IMC)と呼ぶこととする。このとき、任意の $C_{FB}(s) \neq -e^{Ls}P(s)^{-1}$ に対し、 $\hat{r}(s)$ から $\hat{y}(s)$ までの伝達関数は次式で表される。

$$\hat{y}(s) = G(s)e^{-Ls}\hat{r}(s) \quad (4)$$

つまり、 $\hat{y}(s)$ は $C_{FB}(s)$ の与え方には依存しないことがわかる。一方、Fig. 1の制御系の安定性は以下の2つの条件で定められる¹⁶⁾。

1. $G(s)$ および $G(s)P^{-1}(s)$ が安定かつプロパー
2. $e^{-Ls}P(s)C_{FB}(s)$ を一巡伝達関数とする閉ループ系が安定、すなわち

$$1 + e^{-Ls}P(s)C_{FB}(s) = 0 \quad (5)$$

の根の実部がすべて負である¹⁸⁾。

以降、 $C_{FB}(s)$ は条件2を満足するようあらかじめ与えられているものとし、条件1を満たす $G(s)$ の設計にのみ着目する。

[注] 一般にむだ時間系の制御手法として用いられるスミス制御系(Fig. 2で $\tilde{P} = P$ とした場合)でもFig. 1と同様に \hat{r} から \hat{y} までの伝達関数を有理関数とむだ時間の積の形、すなわち分母にむだ時間を含まない形で表現できる。ただし、ここでは $P(s)$ は安定とする。Fig. 2において $\hat{r}(s)$ から $\hat{y}(s)$ までの伝達関数は次式で与えられる。

$$\hat{y}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + C(s)(P(s) - \tilde{P}(s))e^{-Ls} + \tilde{P}(s)C(s)} \hat{r}(s) \quad (6)$$

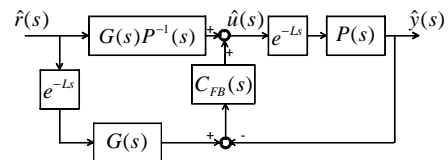


Fig. 1 Two degree of freedom systems with internal model

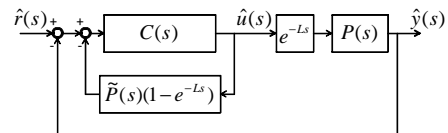


Fig. 2 Smith delay-time compensater

さらに, $P(s) = \tilde{P}(s)$ の場合は次式

$$\frac{\hat{y}}{\hat{r}} = \mathcal{G}(s)e^{-Ls} = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}e^{-Ls} \quad (7)$$

となる. このとき, Fig. 2 の内部安定性は $\mathcal{G}(s)$ の条件として表わすことができる. 具体的には, $\mathcal{G}(s)$ が安定, その相対次数が h_p 以上で z_1, \dots, z_{m_p} に不安定零点を持つことが, Fig. 2 が内部安定となるための必要十分条件となる. これに対し 2 自由度 IMC では, 安定性の条件 2. はスモールゲイン定理より十分小さな定値ゲインで満たせるため, 条件 1. および (4) より, $G(s)$ が安定, その相対次数が h_p 以上であり, z_1, \dots, z_{m_p} に不安定零点を持つことが内部安定となる必要十分条件である. よって, $\mathcal{G}(s)$ と $G(s)$ に課される条件がそれぞれ等しいため, 2 自由度 IMC ではスミス法で実現可能な全ての入出力伝達関数を実現できる^(注 1). さらに, スミス法, IMC では $P(s)$ が安定なものに限定される¹¹⁾ のに対し, Fig. 1 の制御系では条件 2 を満たせば, 不安定な $P(s)$ でもよい. これらの観点から, 2 自由度 IMC は有用な制御系であるといえる.

本論文では, $y(t)$ が与えられた参照信号 $r(t)$ に漸近的に一致する, すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - r(t)) = 0 \quad (8)$$

を満足するような $G(s)$ を求める追従制御問題を考える. 参照信号 $r(t)$ のクラスを周波数領域で以下のように定義する⁷⁾.

$$\mathcal{S}_b := \{\hat{r} : \hat{r} \in \mathcal{S}_s, \mathcal{L}^{-1}[\hat{r}(s)] \in L_\infty\} \quad (9)$$

ただし, \mathcal{S}_s は厳密にプロパーな実有理関数の集合である. \mathcal{S}_b は, その逆ラプラス変換が有界な信号となるような実有理関数の集合である. このとき, 参照信号 $\hat{r}(s)$ の逆ラプラス変換として $r(t)$ が与えられる. \mathcal{S}_b に属するそのような信号の例としては, 正弦波, ステップや指数関数などがある⁷⁾. また, これらの信号の線形結合も \mathcal{S}_b に属する. ここで, もし $\hat{r}(s)$ が不安定零点を m_r 個持つ場合には, その零点を $z_{m_p+1}, \dots, z_{m_p+m_r}$ と表記する. さらに, 表記の簡略化のため $m = m_p + m_r$ とし, 相対次数についても $h = h_p + h_r$ とする.

以上の設定下で, 本論文では追従性能限界に関する次の問題を考察する.

[問題] 伝達関数 $P(s)$, むだ時間 L および参照信号 $\hat{r}(s)$ が与えられたとき, Fig. 1 の制御系に対して次の J^{opt} を求めよ.

$$J^{opt} = \inf_G J \quad (10)$$

$$: J = \|e\|_2^2 \quad (11)$$

ただし, $e(t) = y(t) - r(t)$ は偏差信号である. ■

上記の問題において, $\sqrt{J^{opt}}$ が偏差信号の L_2 ノルムの下限值となる. なお, それを達成する制御器 $G(s)$ は (8) だけで

(注 1) 同様に, スミス制御系と通常の IMC との入出力の意味での等価性も知られている¹⁵⁾.

なく安定性の条件 1 を満たすことも要求される点に注意する.

3. 主要な結果

3.1 評価区間の分割

[問題] を解くために, まず J の評価区間を分割する.

(4) の出力 $y(t)$ はいかなる $G(s)$ に対しても時刻 L までの制御出力値 $y(t)$ が零となることに注意すると (11) の J は $J = J_1 + J_2$ と分割できる. ただし,

$$J_1 = \int_0^L r(t)^2 dt \quad (12)$$

$$J_2 = \int_L^\infty (y(t) - r(t))^2 dt \quad (13)$$

$$= \int_0^\infty (y(t+L) - r(t+L))^2 dt$$

このとき, J_1 は参照信号 $r(t)$ のみに依存するので, [問題] の解は J_2 の最適値 J_2^{opt} を用いて $J^{opt} = J_1 + J_2^{opt}$ と表わされる.

ここで, 信号 $\hat{e}_L(s)$ を次式で定義する.

$$\hat{e}_L(s) = G(s)\hat{r}(s) - \hat{r}_L(s) \quad (14)$$

ただし, $r_L(t)$ は次式で与えられる.

$$r_L(t) := \begin{cases} r(t+L) : t \geq 0 \\ 0 : t < 0 \end{cases} \quad (15)$$

(15) において, $r_L(t-L)$ は時刻 L まで零で, 時刻 L 以降で $r(t)$ と同じ値を持つ信号となる (Fig. 3 の破線). よって, $\hat{e}_L(s)$ を時間領域で表現すると

$$e_L(t) = \begin{cases} y(t+L) - r(t+L) : t \geq 0 \\ 0 : t < 0 \end{cases} \quad (16)$$

となる. これより, (13) は次式となる.

$$J_2 = \int_0^\infty e_L(t)^2 dt \quad (17)$$

したがって, J_2^{opt} を求めるためには $\hat{e}_L(s)$ の性質のみに着目すればよい. なお, $r_L(t)$ は $r(t)$ およびむだ時間長さ L から一意に定まるため $\hat{r}_L(s)$ もあらかじめ与えられているものとして考えることとする^(注 2). このとき, [問題] は, J_1 を求

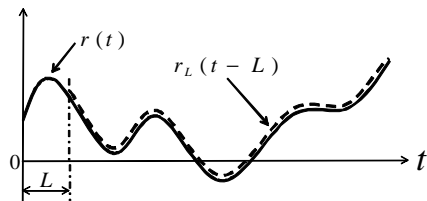


Fig. 3 Reference signals

(注 2) (15) より $\hat{r}_L(s)$ の極は $\hat{r}(s)$ の極のみで構成される. そのため $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$ に対し $\hat{r}_L(s)$ は実有理関数となり, $\|r_L\|_\infty \leq \|r\|_\infty$ より $\hat{r}_L \in \mathcal{S}_b$ を満たす.

める問題と J_2^{opt} を求める問題とを独立に解き、それらの和をとることで解を得ることができる。以降では、特に J_2^{opt} を求めるために出力のパラメトリゼーションを求め、そのうちの最適な出力を得ることを考える。

3.2 実現可能な $\hat{y}(s)$ のパラメトリゼーション

ここでは、実現可能な $\hat{y}(s)$ をパラメトライズすることを考える。このパラメトリゼーションは、最適な解を導出する前段階として、制御系が安定となりかつ参照信号に追従する全ての出力信号 $\hat{y}(s)$ をパラメータ Q を用いて表すものである。

ここで、制御系の安定性は

$$G(s) = \frac{\hat{r}_L(s) + \hat{e}_L(s)}{\hat{r}(s)} \quad (18)$$

および $P(s)^{-1}G(s)$ が安定か否かで決まるが、文献 6) と同様に、 $G(s)$ が満たすべき条件は $\hat{e}_L(s)$ が満たすべき条件として記述することができる。安定なだけでなく (8) も満足する(注 3)ための必要十分条件は、

$$\hat{r}_L(z_i) + \hat{e}_L(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (19)$$

および $\hat{r}_L(s) + \hat{e}_L(s)$ の相対次数が h 以上、かつ $\hat{e}_L \in \mathcal{S}$ であることである。従って、実現可能な $\hat{e}_L(s)$ 、すなわち上記の条件を満足する $\hat{e}_L(s)$ のパラメトリゼーションは次の定理によって与えられる。

《定理 1》 $P(s)$, $\hat{r}(s)$ および L が与えられたと仮定する。このとき、 $\hat{r}(s)$, L より $\hat{r}_L(s)$ が一意に決まる。さらに、 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, β_1, \dots, β_m , $\gamma_0, \dots, \gamma_{h-1}$ は任意に与えられた正の実数とする。このとき、任意の $\hat{e}_L(s)$ に対して次の 2 つの条件は等価である。

- (i) $\hat{r}_L(s) + \hat{e}_L(s)$ の相対次数が h 以上、 $\hat{e}_L \in \mathcal{S}$ 、かつ次式

$$\hat{r}_L(z_i) + \hat{e}_L(z_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (20)$$

が成り立つ。

- (ii) $\hat{e}_L \in \mathcal{S}_h$ が成り立つ。ただし、

$$\mathcal{S}_h = A_h(s) + B_h(s)\mathcal{S} \quad (21)$$

であり、 $A_k(s)$, $B_k(s)$, $k = 1, \dots, h$ は次の漸化式

$$A_{k+1}(s) = A_k(s) + \delta_k B_k(s) \quad (22)$$

$$B_{k+1}(s) = B_k(s) \frac{1}{s + \gamma_k} \quad (23)$$

$$\delta_k = - \lim_{s \rightarrow \infty} s^k (\hat{r}_L(s) + A_k(s)) \quad (24)$$

で定義される関数、 $A_0(s)$, $B_0(s)$ はそれぞれ次式で定義される関数である。

$$A_0(s) =$$

(注 3) $\hat{e}_L \in \mathcal{S}$ だけでなく \hat{e}_L の相対次数が 1 以上であることが (8) の必要十分条件であり、 $\hat{r}_L(s) + \hat{e}_L(s)$ の相対次数が 1 以上であれば $\hat{e}_L(s)$ の相対次数は 1 以上となる。

$$- \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m (s - z_j) \prod_{k=1}^{m-1} (z_i + \alpha_k)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m-1} (s + \alpha_k)} \hat{r}_L(z_i) \quad (25)$$

$$B_0(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s + \beta_i)} \quad (26)$$

ここで $L = 0$ とすると、 \mathcal{S}_h は文献 6) の 2 自由度系での実現可能な $\hat{e}(s)$ の集合に一致する。なお、 $\hat{r}(s)$ の零点と $\hat{r}_L(s)$ の零点は異なるため、必ずしも $\hat{r}_L(z_i) = 0$, $i = m_p + 1, \dots, m$ とはならないことに注意する。

以上より、制御系が安定となりかつ $\hat{r}(s)$ に追従するような $\hat{y}(s)$ のパラメトリゼーション \mathcal{S}_y は次式で与えられる。

$$\mathcal{S}_y = \{\hat{y}(s) = (\hat{r}_L(s) + \hat{e}_L(s)) e^{-Ls} : \hat{e}_L \in \mathcal{S}_h\} \quad (27)$$

3.3 偏差の L_2 ノルムの下限値

次に、定理 1 の $\hat{e}_L(s)$ のパラメトリゼーションに基づき、 $\hat{e}_L(s)$ の L_2 ノルムの最小値を求める問題、すなわち、以下の J_2^{opt} を求める問題を考える。

$$J_2^{opt} = \inf_{Q \in \mathcal{S}} \|\hat{e}_L\|_2^2 \quad (28)$$

$$\hat{e}_L(s) = A_h(s) + B_h(s)Q(s) \quad (29)$$

ここで、 $A_h(s)$ および $B_h(s)$ が閉右半平面で解析的であることから、 $T_1(s) = A_h(s)$, $T_2(s) = B_h(s)$, $T_3(s) = 1$ とおくと (28) の最小化問題は、標準的なモデルマッチング問題

$$\inf_{Q \in \mathcal{S}} \|T_1 + T_2 Q T_3\|_2 \quad (30)$$

に帰着させることができる。ここで、 $A(s)$ の相対次数は 1 以上であることから、(30) のモデルマッチング問題は可解である。

《定理 2》 $\hat{e}_L^{opt}(s)$ および J_2^{opt} は次式で与えられる。

$$\hat{e}_L^{opt}(s) = - \sum_{i=1}^m \frac{q_i \prod_{k=1, i \neq k}^m (s - z_k)}{\prod_{k=1}^m (s + \bar{z}_k)} \quad (31)$$

$$q_i = \frac{\hat{r}_L(z_i) \prod_{j=1}^m (z_i + \bar{z}_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (z_i - z_j)} \quad (32)$$

$$J_2^{opt} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{q}_i q_j}{\bar{z}_i + z_j} \quad (33)$$

(証明) まず、 $\hat{e}_L^{opt}(s)$ は文献 6) の 2 自由度系の結果を利用することで (31) と求められる。文献 17) および付録の補題 1 より

$$\|\hat{e}_L^{opt}\|_2^2 = \|\tilde{\phi}\|_2^2 \quad (34)$$

$$\tilde{\phi}(s) = \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{s + z_i} \quad (35)$$

となる。ここで、 $\tilde{\phi}(s)$ の状態空間実現を

$$\tilde{\phi}(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (36)$$

$$A = \text{diag}\{-z_1, \dots, -z_m\}, \quad B = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

とすると, (34) の $\|\tilde{\phi}\|_2^2$ は

$$\|\phi\|_2^2 = B^* X B \quad (37)$$

で与えられる. ただし, X は次のリアプノフ方程式

$$A^* X + X A + C^* C = 0 \quad (38)$$

の解であり, (36) の実現に対しては (38) の解は $X_{ij} = 1/(\bar{z}_i + z_j)$ と求まることは明らかである. よって, (37) から J_2^{opt} は (33) のように求められる^(注4). \square

以上の結果, J^{opt} は (12), (33) により得られる. このとき, 参照信号の関数形による制御性能への影響が $\hat{r}_L(z_i)$ として (33) に現れていることがわかる. 特に, 参照信号が不安定零点を持たない場合には $\hat{r}(z_i)$ 以外の項は制御対象のパラメータのみで表されていることから, この部分が小さければ追従偏差を比較的小さくすることが可能となる. 一方, $\hat{r}_L(z_i)$ がそれぞれ小さくなるような参照信号ならば, 追従偏差の小さな追従制御が実現できる. 特に, 全ての z_i について $\hat{r}_L(z_i) = 0$ ならば $J_2^{opt} = 0$ となり, 問題設定は異なるものの文献 8) と同様の応答波形, すなわちむだ時間 L 経過後に即座に誤差が零となる応答が予想される.

また, 本論文で求めた下限値は 2 自由度 IMC に対するものであるが, $P(s)$ が安定な場合にはスミス制御系や通常の IMC に対する下限値にもなっている.

4. 数値例を用いた下限値の考察

本章では様々な参照信号に対する数値例を示す. $P(s)$ が 1 個の不安定零点 z_1 を持ち, かつその相対次数が零の場合を考える. 参照信号として $r(t) = 1$ (ステップ信号) の場合と時変の信号の場合に対する数値例をそれぞれ示す. 特にステップの場合には文献 5) に示される結果との比較を行い, 2 自由度 IMC の制御系としての優位性について考察する.

4.1 ステップ信号の場合

参照信号がステップの場合, $\hat{r}(s) = 1/s$ より $h = h_r = 1$ となる. この場合には, L の大きさに依らず

$$\hat{r}_L(s) = \frac{1}{s} \quad (39)$$

が成り立つ. また, 実現可能な $\hat{e}_L(s)$ の集合は定理 1 より

$$\begin{aligned} \hat{e}_L \in \{A_1(s) + B_1(s)S\} \\ A_1(s) = -\frac{(z_1 + 1)}{(s + 1)} \frac{1}{z_1} \end{aligned} \quad (40)$$

$$B_1(s) = \frac{s - z_1}{(s + 1)(s + 2)}$$

と求められる. このとき, $\hat{e}_L(s)$ の集合は L に依存しないため, J_2^{opt} の値は (33) より

$$J_2^{opt} = \frac{2}{z_1} \quad (41)$$

と求まる. 一方, $J_1 = \int_0^L 1^2 dt = L$ であることから, J^{opt} は

$$J^{opt} = L + \frac{2}{z_1} \quad (42)$$

となり, L の単調増加関数となっている. このとき, むだ時間が長ければ長いほど, 偏差の L_2 ノルムの意味で制御しにくい. 一方, 制御対象の零点に起因する性能限界はむだ時間とは独立しており, 制御対象の不安定零点が原点に近いほど制御しにくいことがわかる.

文献 5) では単一フィードバック系でステップ信号へ追従する場合の J^{opt} が離散時間系の結果にデルタ変換を用いることで導出されている. 上記の数値例について $P(s)$ が安定な場合には, 文献 5) と (42) 式とはその値が一致する. 一方, $P(s)$ が不安定な場合には, 文献 5) では不安定極に起因して下限値がさらに大きくなるのに対し, 本論文の下限値は (42) 式で与えられる. そのため, 少なくともステップ信号への追従に関しては, 2 自由度 IMC の方が単一フィードバック系よりも追従誤差の L_2 ノルムの意味でよい制御が可能となることがわかる.

4.2 時変の参照信号の場合

参照信号が時間とともに変化するものの例として, ここでは正弦波に対する数値例を示す. 参照信号が正弦波 $r(t) = \sin(t)$ の場合, $\hat{r}(s) = 1/(s^2 + 1)$ より $h = h_r = 2$ となる. むだ時間 L および参照信号 $\hat{r}(s)$ を用いて $\hat{r}_L(s)$ は

$$\hat{r}_L(s) = \frac{\sin(L)s + \cos(L)}{s^2 + 1} \quad (43)$$

と与えられる. このとき, $\hat{e}_L(s)$ の集合は定理 1 より

$$\begin{aligned} \hat{e}_L \in \{A_2(s) + B_2(s)S\} \\ A_2(s) = -\frac{(z_1 + 1)(z_1 + 2)}{(s + 1)(s + 2)} \hat{r}_L(z_1) - \frac{\sin(L)(s - z_1)}{(s + 1)(s + 2)} \\ B_2(s) = \frac{s - z_1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} \end{aligned} \quad (44)$$

となる. ただし, ステップの場合と異なり,

$$\hat{r}_L(z_1) = (\sin(L)z_1 + \cos(L))/(z_1^2 + 1) \quad (45)$$

は L に依存して関数形が変化する. これより, 最適値 J^{opt} は

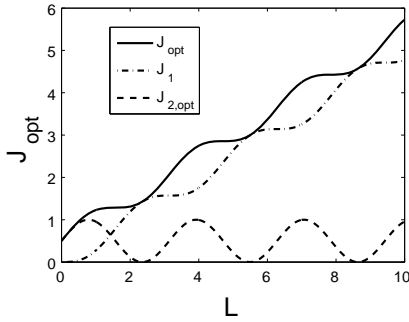
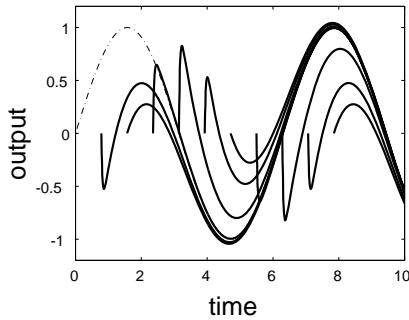
$$J^{opt} = J_1 + J_2^{opt} \quad (46)$$

$$J_1 = \int_0^L \sin^2(t) dt = \frac{L}{2} - \frac{\sin(2L)}{4} \quad (47)$$

$$J_2^{opt} = 2z_1 \hat{r}_L(z_1)^2 \quad (48)$$

と求められる. ステップの場合と同様に, J_1 は L のみに依存する. それに対し, J_2^{opt} の値はステップの場合と異なり, z_1

(注4) 文献 6) では実零点を仮定して J^{opt} を求めたが, 本証明を利用することで文献 6) の結果を複素零点を含む結果に拡張することが可能となる.

Fig. 4 J^{opt} , J_1 , J_2^{opt} of L Fig. 5 Output signals ($L = \pi i/2, i = 1, \dots, 10$)

だけでなく L にも依存する．

ここで、 J_2^{opt} は $\hat{r}_L(z_1)$ の値が小さい場合には小さくなり、特に $\hat{r}_L(z_1) = 0$ となる L に対して $J_2^{opt} = 0$ となることが (48) からわかる．この結果は問題設定は異なるものの文献 8) の応答波形に対応したものとなっている．

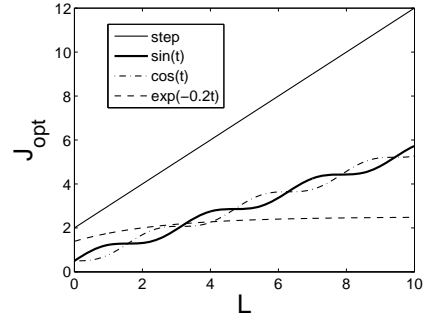
一方、 J^{opt} において

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^{opt}}{\partial L} &= [(z_1^2 + 1)^2 + (z_1^4 - 6z_1^2 + 1) \cos(2L) \\ &\quad + (4z_1^3 - 4z_1) \sin(2L)] / (2(z_1^2 + 1)^2) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sin(2L + \alpha)) \\ \alpha &= \arctan((z_1^4 - 6z_1^2 + 1) / (4z_1^3 - 4z_1)) \end{aligned} \quad (49)$$

となるので、 J^{opt} は、任意に与えられた z_1 に対して、 L に関して単調非減少となっている．

ここで、むだ時間長さ L が最適値に与える影響を検証するため、 $z_1 = 1$ と固定し L を変化させた場合の結果を Figs. 4, 5 に示す．Fig. 4 は、むだ時間の長さに対する J^{opt} , J_1 , J_2^{opt} の値をそれぞれ示し、Fig. 5 はむだ時間長さ $L = i\pi/4$ ($i = 1, \dots, 10$) の最適出力 $y^{opt}(t)$ および $r(t)$ を示す．このとき、Fig. 4 より $L = \arctan(-1) = 3\pi/4 + \pi i$ ($i = 0, 1, \dots$) において $J_2^{opt} = 0$ となるのがわかる．実際、左から 3 本目 ($L = 3\pi/4$) と 7 本目 ($L = 7\pi/4$) について L 秒後に即座に参照信号に追従している．

最後に、様々な参照信号に対するむだ時間長さ L と J^{opt} との関係を示す．ここでは参照信号 $r(t)$ として、単位ステップ信号 (細い実線)、 $\sin(t)$ (太い実線)、 $\cos(t)$ (一点鎖線)、 $\exp(-0.2t)$ (破線) を用いている． J^{opt} はそれぞれ次式で与

Fig. 6 J^{opt}

えられる．

$$J_{\text{step}}^{opt} = L + 2 \quad (50)$$

$$J_{\text{sin}}^{opt} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin(2L)}{4} \quad (51)$$

$$J_{\text{cos}}^{opt} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2L)}{4} \quad (52)$$

$$J_{\text{exp}}^{opt} = 2.5 + \left(\frac{2}{1.44} - 2.5 \right) \exp(-0.4L) \quad (53)$$

さらに Fig. 6 では、それぞれの場合について J^{opt} が L に関して単調非減少となっていることがわかる．

5. おわりに

本論文では、入力むだ時間を有する制御対象に対して 2 自由度内部モデル制御系を考え、その制御系での偏差の L_2 ノルムの下限値を解析的に導いた．提案した制御系は、入出力特性としてスミス制御系や通常の内部モデル制御系を含むものとなっており、導出した下限値はこれらの制御系に対する下限値にもなっている．また、得られた解は、むだ時間のみに起因する部分 J_1^{opt} と非最小位相零点にも起因する部分 J_2^{opt} とに別けて表わされる．

数値例では、単一フィードバックに対する結果との比較を行い、 $P(s)$ が不安定な場合には本制御系の下限値が小さいことを示した．また、正弦波などのステップ以外の参照信号について結果の考察を行い、 J^{opt} がむだ時間長さ L について単調非減少であることを確認した．

謝辞 Fig. 1 の制御系に関して有益なご助言を頂きました、九州工業大学の延山英沢教授、瀬部昇教授をはじめ RACOT 研究会の皆様にご感謝致します．

参考文献

- 1) J. Chen, L. Qiu and O. Toker: Limitations on maximal tracking accuracy, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**-1, 45/53(2000)
- 2) J. Chen, S. Hara and G. Chen: Best Tracking and Regulation Performance Under Control Energy Constraint, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**-8, 1320/1336(2003)
- 3) J. Chen, Z. Ren, S. Hara and L. Qiu: Optimal Tracking Performance: Preview Control and Exponential Signals, *Transactions on Automatic Control*, **46**-10,

1647/1653(2001)

- 4) W. Su, L. Qiu and J. Chen: Fundamental Performance Limitation in Tracking Sinusoidal Signals, *Transactions on Automatic Control*, **48-8**, 1371/1380(2003)
- 5) Toni, 原: 1 入出力線形無駄時間系の \mathcal{H}_2 制御性能限界, システム制御情報学会論文誌, **20-2**, 87/89(2007)
- 6) 岡島, 浅井: あるクラスの参照信号に対する追従性能限界の解析, 計測自動制御学会論文集, **43-9**, 812/820(2007)
- 7) 岡島, 浅井: 目標信号に漸近的に追従し有界な入力で達成可能な出力のパラメトリゼーション, システム制御情報学会論文誌, **20-1**, 39/49(2007)
- 8) 岡島, 浅井: 入力印加時刻を陽に考慮した非最小位相系の制御方策, システム制御情報学会論文誌, **20-10**, 413/415(2007)
- 9) 阿部, 延山: むだ時間系の制御, 計測と制御, **42-4**, 316/319(2003)
- 10) 阿部, 延山: むだ時間システム入門 1-伝達関数からのアプローチ-, 計測と制御, **44-11**, 799/804 (2005)
- 11) O. Smith: A Controller to Overcome Dead Time, *ISA J.*, **6**, 28/33(1959)
- 12) 阿部, 市原: むだ時間系に対する IMC 構造を用いた閉ループ同定と補償器の繰返し設計, 計測自動制御学会論文集, **36-7**, 563/568 (2000)
- 13) 舒, 渡部, 山田: 入力にむだ時間を含む系のロバスト IMC 制御, 計測自動制御学会論文集, **30-6**, 735/737 (1994)
- 14) M. Morari: *Robust Process Control*, Prentice Hall(1989)
- 15) 阿部, 児島: むだ時間・分布定数系の制御, コロナ社 (2007)
- 16) 杉江俊治: サーボ系の設計理論と H_∞ 制御性能, システム/制御/情報, **35-2**, 80/87(1991)
- 17) 藤井隆雄: フィードバック制御の理論, コロナ社 (1996)
- 18) 荒木光彦: 古典制御理論, システム制御シリーズ 1, 培風館 (2000)
- 19) 岡島, 浅井, 川路: 入力むだ時間を有する制御対象の追従性能限界, 第 52 回システム制御情報学会研究発表講演会資料 (2008)

《付 録》

[補題 1] $\phi(s)$ および $\tilde{\phi}(s)$ を次式で与えられる実有理関数とする .

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{b_i}{s-a_i} + \sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{d_j}{s-c_j} + \frac{\bar{d}_j}{s-\bar{c}_j} \right),$$

$$\tilde{\phi}(s) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{b_i}{s+a_i} + \sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{\bar{d}_j}{s+\bar{c}_j} + \frac{d_j}{s+c_j} \right)$$

ただし, (a_i, b_i) および (c_j, d_j) はそれぞれ実数, 複素数の組とし, $a_i > 0, \operatorname{Re}(c_j) > 0$ と仮定する. このとき, $\|\phi\|_2 = \|\tilde{\phi}\|_2$ が成り立つ .

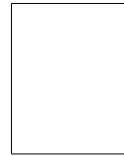
(証明) 定義より $\tilde{\phi}(s) = -\phi(-s)$ が成り立つ. よって次式

$$\tilde{\phi}(-j\omega) \tilde{\phi}(j\omega) = \phi(-j\omega) \phi(j\omega)$$

が成り立つことから $\|\phi\|_2 = \|\tilde{\phi}\|_2$ が成り立つことは明らか .

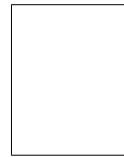
[著 者 紹 介]

岡 島 寛 (正会員)



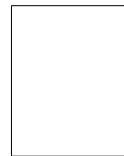
1980年5月23日生. 2004年3月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了. 2007年4月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士後期課程修了. 熊本大学自然科学研究科情報電気電子工学専攻助教となり現在に至る. 追従制御に関する研究に従事. 博士(工学). システム制御情報学会の会員.

浅 井 徹 (正会員)



1968年10月6日生. 1996年3月東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修了. 同年1月日本学術振興会特別研究員. 1997年4月~1998年6月カリフォルニア大学バークレー校客員研究員. 1999年3月大阪大学大学院工学研究科助手, 2002年4月同研究科講師, 2005年4月同研究科助教授, 2007年4月同研究科准教授となり現在に至る. ロバスト制御の研究に従事. 博士(工学). システム制御情報学会の会員.

川 路 茂 保 (正会員)



1944年1月18日生. 1969年熊本大学大学院工学研究科電気工学専攻修了. 同年同工学部助手, 同助教授を経て, 88年同教授, 99年~2009年大学院自然科学研究科教授. 現在, 熊本大学名誉教授. この間, 94~95年カリフォルニア大学バークレー校, ハーバード大学等の客員研究員. ロバスト制御理論とメカニカルシステムへの応用, インテリジェント制御系の構築, ロボティクスなどの研究に従事. 工学博士. 計測自動制御学会の常任理事, システムインテグレーション部門長などを歴任. 計測自動制御学会技術賞受賞. 電気学会上級会員, 日本機械学会フェロー, 日本人間工学会, IEEEなどの会員, 当会フェロー.