

## 論文要旨

本稿では不安定零点を有する制御対象が与えられた場合において、信号のクラスを、そのラプラス変換が有理多項式で表されるクラスに限定することで、有界な入力で達成でき、かつ参照信号に漸近的に一致するような制御出力の集合の  $Q$  パラメトリゼーションを与える。さらに、参照信号と制御出力の偏差の  $L_2$  ノルムが最小となる出力を解析的に導出し、その出力に関して偏差の  $L_2$  ノルムを分解できることを示す。また、本論文で得られたパラメトリゼーションを用いることで、入力および出力の偏差に関する  $L_2$  最適化問題をモデルマッチング問題の枠組みで扱えることを示し、数値例によりその有効性を検証する。

# 目標信号に漸近的に追従し有界な入力で達成可能な出力のパラメトリゼーション\*

岡島 寛<sup>†</sup>・浅井 徹<sup>†</sup>

## Parameterization of Outputs which Track to Reference Asymptotically and Are Achievable by Bounded Input\*

Hiroshi OKAJIMA<sup>†</sup> and Toru ASAI<sup>†</sup>

This paper deals with trajectory tracking control for non-minimum phase systems. We first consider to characterize output such that it tracks to a given reference signal asymptotically and that the corresponding input is bounded. In particular, we parameterize the error signals between the reference and the achievable output by using Q-parameters in the frequency domain. Since the parameterized set consists of rational functions which are analytic in the closed right half plane, we can solve easily the problem to minimize the  $L_2$  norm of the error and the analytic solution of the optimal error is obtained. The optimal output is the projection of the reference to the space of achievable outputs. By using the parameterization, the simultaneous optimization of the error and the input deviation from the steady state input can be also solved. The effectiveness of the proposed method is examined by numerical examples.

### 1. はじめに

非最小位相系は、例えばステップ応答が逆応答や大きなオーバーシュートを示す [1] など、制御が難しい対象として知られている。実際、そのような制御対象に対する I 型サーボ系については、制御出力とステップ目標値との偏差の  $L_2$  ノルムの下限値は正であり、その解析的な解が明らかにされている [2,3]。また、入力、偏差の  $L_2$  ノルム最小化問題においても同様な解析解が導出されている [4]。これらの解析解はいずれも不安定零点の位置に依存する。

本論文では、非最小位相系に対して目標信号への追従制御問題を考える。従来、追従問題を考える場合には 2 自由度系などを構成した上で参照信号を印加し、フィードバックやフィードフォワードのコントローラによって追従特性を改善することが行われていた。その際、フィードフォワードコントローラは参照信号を加工する役割を果たしている。しかしながら、結果として追従が達成されるのであれば、システムへの入力は必ずしも参照信号そ

のものあるいはそれをフィルタリングしたものである必要はない。そこで、本論文では、フィードバック/フィードフォワードのコントローラ設計を考えるのではなく、制御対象は安定もしくはフィードバックコントローラにより安定化されているものとし、そのシステムに印加すべきフィードフォワード入力を設計することを考える。

非最小位相系の場合、制御対象が双プロパーであったとしても、必ずしも目標信号を達成する有界な入力が存在するとは限らない。このことは、どのような有界な入力に対しても出力のラプラス変換が制御対象と同じ不安定零点を持つため、達成可能な出力信号の集合が限定されることに起因する。また、不安定零点だけでなく、制御対象の相対次数の大きさによっても、達成可能な出力信号の集合は異なる。よって、参照信号への追従を考える場合には、参照信号と出力信号に対する制約条件の関係を考慮する必要がある。しかしながら、有界な入力での達成可能な出力信号の特徴付けはこれまで陽に与えられていなかった。

そこで本研究では、特に制御対象が不安定零点を持つ場合や厳密にプロパーな場合に着目して、実現可能な入力で達成され、かつ参照信号に漸的に一致する制御出力のクラスを陽に与えることを考える。具体的には、考えられる全ての信号を、そのラプラス変換が有理関数で表され、かつ  $L_\infty$  有界な信号に限定することで、目標信

\* 原稿受付 2006年4月18日

<sup>†</sup> 大阪大学 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamadaoka, Suita city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: Non-minimum phase systems, Parameterization, Tracking control

号に漸近し、かつ有界な入力で達成可能な出力信号を特徴付けることを考える。その際、制御出力そのものではなく、制御出力と参照信号の偏差の  $Q$ -パラメトリゼーションを与える。偏差のラプラス変換は閉右半平面で解析的な有理関数となるので、このパラメトリゼーションを用いれば、例えば、偏差の  $L_2$  ノルムが最小となる入力を求めることができる。また、さらに入力と出力の重み付きノルム最小化問題を考えることで、より実用的なフィードフォワード入力の設計法を提案する。提案手法の有効性は数値例を用いて検証する。

本論文の構成は以下の通りである。2.節で問題を設定し、3.節で主要な結果を述べる。まず、参照信号と制御出力の偏差のパラメトリゼーションを導出する。次に、得られた偏差のパラメトリゼーションに基づいてその  $L_2$  ノルム最小化問題を考える。さらに、これを入力と出力の同時最適化問題に拡張する。最後に4.節で数値例を示す。

本論文で用いる記号は標準的なものである。信号  $u(t)$  のラプラス変換を  $\hat{u}(s)$  と書く。集合  $L_\infty$  は以下の信号空間である。

$$L_\infty = \{u(t) : \sup_t |u(t)| < \infty\} \quad (1)$$

$\|u\|_2$  は  $\hat{u}(s)$  の  $L_2$  ノルム

$$\|u\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(-j\omega)\hat{u}(j\omega)d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

である。 $S$  はプロパーかつ閉右半平面で解析的な有理関数の集合である。

## 2. 問題設定

制御対象の伝達関数を

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (3)$$

とし、Fig. 1 の1入出力フィードフォワード制御系を考える。ここで、 $y(t)$  は制御出力、 $u(t)$  は制御入力である。このとき、明らかに

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) \quad (4)$$

が成り立つ。本論文では、 $G(s)$  は安定かつ  $m_z$  個の不安定零点  $z_1, \dots, z_{m_z}$  を持つものとする。すなわち、

$$G(z_i) = 0, \operatorname{Re}(z_i) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m_z \quad (5)$$

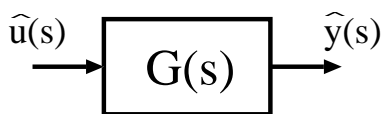


Fig. 1 Feedforward control system

である。ただし、本論文では  $z_i$  は全て異なり、さらにその実部は全て正であるものとする。すなわち、

$$z_i \neq z_j \quad \forall i \neq j \quad (6)$$

$$\operatorname{Re}(z_i) > 0 \quad \forall i \quad (7)$$

である。また、制御対象の相対次数を  $n - m = m_r > 0$  とする。このような場合、 $G(s)$  は以下のように表すこともできる。

$$G(s) = \frac{h_G(s) \prod (s - z_i)}{l_G(s)} \quad (8)$$

ただし、 $h_G(s)$ 、 $l_G(s)$  はそれぞれ  $m - m_z$ 、 $n$  次のフルビッツ多項式である。

目標値追従を考えるときには、 $y(t)$  が与えられた参照信号  $r(t)$  に漸近的に一致するような  $u(t)$  を求める必要がある。ここで、 $\hat{y}(s)$  が  $\hat{r}(s)$  に一致すると仮定すれば、(4) 式より、 $\hat{u}(s)$  は次式を満足するものでなければならない。

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{r}(s)}{G(s)} \quad (9)$$

このとき、仮定より  $G(s)$  は  $m_r$  だけの相対次数を有するので、(9) 式で定められた  $\hat{u}(s)$  はデルタ関数を含む場合がある。そのような場合、 $y(t)$  を  $r(t)$  に一致させるような  $u(t)$  は実現不可能である。また、 $G(s)$  が不安定零点も有するときには、(9) 式で得られる  $u(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で発散する場合もある。そのような  $\hat{u}(s)$  は  $G(s)$  との間に不安定な極零相殺を起こすので、 $u(t)$  を印加したとしても、わずかな誤差によってその出力と  $r(t)$  との誤差は発散する。

このように、 $G(s)$  が双プロパーかつ安定、最小位相な伝達関数でない場合には、一般に実現可能な  $u(t)$  を用いて、与えられた  $r(t)$  を達成できるとは限らない。そこで本論文では実現可能な  $u(t)$  によって達成でき、かつ  $r(t)$  に漸近する、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r_f(t) - r(t)) = 0 \quad (10)$$

を満足する出力  $y(t) = r_f(t)$  を考える。

上記の  $r_f(t)$  を考えるために、まず、実現可能な入力信号のクラスを周波数領域で以下のように定義する。

$$S_b = \{\hat{u} : \hat{u} \in S_s, \mathcal{L}^{-1}[\hat{u}] \in L_\infty\} \quad (11)$$

ただし、 $S_s$  は厳密にプロパーな実有理関数の集合である。 $S_b$  は、その逆ラプラス変換が有界な信号となるような実有理関数の集合である。このような集合には、ステップ信号や三角関数のような信号などが含まれる。

以下の補題は、与えられた  $\hat{u} \in S_s$  が  $\hat{u} \in S_b$  となるための必要十分条件を与えている。

**【補題 1】**  $\hat{u} \in S_s$  とする。このとき、 $\hat{u} \in S_b$  となるための必要十分条件は、 $\hat{u}(s)$  の極の実部が全て非正となり、

かつ虚軸上の極に関しては高々1位であることである。

(証明) (必要性)  $\hat{u}(s)$  が実部が正となる極、もしくは虚軸上に2位以上の極を持つとき、あきらかに  $\mathcal{L}^{-1}[\hat{u}] \notin L_\infty$  である。よって成り立つ。

(十分性) 仮定より  $\hat{u} \in \mathcal{S}_s$  である。このときさらに、 $\hat{u}(s)$  の極の実部が全て非正で、かつ虚軸上の極は高々1位ならば、 $\hat{u}(s)$  の部分分数分解の各要素の逆ラプラス変換は有界な信号となる。よって、 $\mathcal{L}^{-1}[\hat{u}] \in L_\infty$  となるので  $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  となる。□

仮定より  $G(s)$  は安定であるので、補題1より  $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  であるとき  $\hat{r}_f \in \mathcal{S}_b$  である。また、本論文では与えられる参照信号  $\hat{r}(s)$  も  $\mathcal{S}_b$  に属しているものとする。

以上より、本論文では下記の問題を考える。

【問題】 与えられた  $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$  に対して、(10) 式を満足し、かつ

$$\hat{r}_f(s) = G(s)\hat{u}(s) \quad (12)$$

を満足する  $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  が存在するようなすべての  $\hat{r}_f \in \mathcal{S}_b$  をパラメトライズせよ。

本問題では制御対象の初期状態が0の場合のみを考えているが、初期状態が0以外の場合には、新たな参照信号

$$\hat{r}_{x(0)}(s) = \hat{r}(s) - \hat{x}_0(s) \quad (13)$$

を参照信号として用いることで本問題の枠組みで考えることができる。ただし  $\hat{x}_0(s)$  は初期値応答のラプラス変換である。

本論文では目標信号追従を達成する  $\hat{u}(s)$  を直接考える。一方、目標信号追従を考える場合には、従来より2自由度系が広く用いられている。2自由度系では高い目標信号追従特性を得るためにフィードバック補償器とフィードフォワード補償器が併用される。そのうち、目標信号追従特性の改善にはフィードフォワード要素の設計がとくに重要である。本論文の問題と対比するために、フィードバック補償器を用いて安定化されたシステムを  $G(s)$  とすると、2自由度系では Fig. 1 の  $\hat{u}(s)$  をある安定かつプロパーなフィルタ  $F(s)$  を用いて

$$\hat{u}(s) = F(s)\hat{r}(s) \quad (14)$$

と定めることに対応する (Fig. 2)。

このとき、例えば、 $\hat{r}(s)$  が不安定零点を持つ場合には、任意の  $F(s)$  に対して  $\hat{u}(s)$  も参照信号と同じ不安定零点を持つ。また、参照信号の相対次数が2以上の場合には、 $\hat{u}(s)$  の相対次数は参照信号の相対次数以上となる。

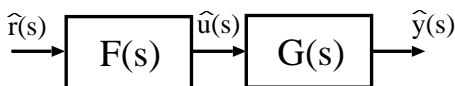


Fig. 2 Signals of two degree of freedom control system

これらのことから、参照信号を安定かつプロパーなフィルタ  $F(s)$  で加工した  $\hat{u}(s)$  の集合を

$$\mathcal{S}_{Fr} = \{ \hat{u} : \hat{u}(s) = F(s)\hat{r}(s), F \in \mathcal{S} \} \quad (15)$$

とすると、参照信号が不安定零点を持つか、その相対次数が2以上の場合には、 $\mathcal{S}_{Fr}$  は  $\mathcal{S}_b$  よりも小さな集合となることがわかる。そのような場合には、 $\mathcal{S}_b$  の中から  $\hat{u}(s)$  を選ぶ、すなわち、Fig. 2 の構成をとらずに  $\hat{u}(s)$  を直接考えるほうが、より高い追従性能を期待することができる。

非最小位相系の制御出力が参照信号に一致する有界な入力を求める別の手法として、非因果的な逆を考える方法が知られている [5,6]。この方法では、目標信号が立ち上がる時刻よりも前に入力を印加することで、出力を参照信号に厳密に一致させる有界な入力が求まる。見方を変えると、この方法は、制御出力が参照信号に一致するような入力  $u(t)$  と初期状態  $x(0)$  の組を求めていることと等価である。そのため、事前に入力を印加することができず、制御対象の初期状態を設計者が定めることができない場合には、この方法によって出力信号を参照信号に追従させる有界な入力信号を求めることはできない。

### 3. 主要な結果

#### 3.1 $\hat{r}_f(s)$ の特徴付け

$\hat{u}(s)$  が  $\mathcal{S}_b$  の要素となるような  $\hat{r}_f(s)$  は次の補題によって特徴付けられる。

【補題2】 参照信号  $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$  と (8) 式の伝達関数  $G(s)$  が与えられたと仮定する。このとき、任意に与えられた  $\hat{r}_f \in \mathcal{S}_b$  に対して以下の2条件は等価である。

- (i) (10) 式が成立し、かつ、(12) 式を満足する  $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  が存在する。
- (ii)  $\hat{e}(s) = \hat{r}_f(s) - \hat{r}(s)$  が  $\mathcal{S}$  に属し、かつ、次の条件が成り立つ。
  - a.  $\hat{r}_f(s) = \hat{r}(s) + \hat{e}(s)$  の相対次数が  $m_r$  より大きい。
  - b. 次式が成り立つ。

$$\hat{r}_f(z_i) = \hat{r}(z_i) + \hat{e}(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m_z \quad (16)$$

(証明) (i)  $\rightarrow$  (ii): (i) が成り立つと仮定する。このとき、 $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  より  $\hat{u} \in \mathcal{S}_s$  であるため、その相対次数は1以上である。よって (12) 式より、 $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$  の相対次数は  $m_r$  より大きい。また、補題1より、 $\hat{u}(s)$  は開右半平面に極を持たないため、 $|\hat{u}(z_i)| < \infty$  である。さらに、 $G(z_i) = 0$  であることから

$$G(z_i)u(z_i) = \hat{r}_f(z_i) = 0 \quad (17)$$

となり (ii) の b. が成立する。また、 $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$  および  $\hat{r}_f \in \mathcal{S}_b$  より  $\hat{e} \in \mathcal{S}_b$  となる。さらに、(10) 式が成り立つことより、 $\hat{e}(s)$  は閉右半平面に極を持たない。よって  $\hat{e} \in \mathcal{S}$  である。(ii)  $\rightarrow$  (i): (ii) が成り立つと仮定し、 $\hat{u}(s)$  を次式で定

める.

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{r}_f(s)}{G(s)} = \frac{l_G(s)}{h_G(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s - z_i)} \hat{r}_f(s) \quad (18)$$

一方,  $b$ . より  $\hat{r}_f(s)$  はある既約な多項式  $h(s)$ ,  $l(s)$  を用いて以下のように表される.

$$\hat{r}_f(s) = \frac{h(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s - z_i)}{l(s)} \quad (19)$$

ここで,  $\hat{r}_f \in \mathcal{S}_b$  より,  $l(s) = 0$  の全ての根の実部は非正で, かつ虚軸上の根は高々1位である. (18), (19) 式より,  $\hat{u}(s)$  は次式で与えられる.

$$\hat{u}(s) = \frac{l_G(s)h(s)}{h_G(s)l(s)} \quad (20)$$

$h_G(s)$  はフルビッツであるので  $\hat{u}(s)$  は開右半平面に極を持たず, かつ, 虚軸上の極は高々1位である. 一方, a. および  $G(s)$  の相対次数が  $m_r$  であることから  $\hat{u}(s)$  の相対次数は1以上である. この結果, 補題1より  $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  となる. すなわち, (12) 式を満足する  $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$  が存在する.

また,  $\hat{e} \in \mathcal{S}$  より  $e(t)$  に関して次式が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0 \quad (21)$$

すなわち, (10) 式が成り立つ.  $\square$

$\hat{e}(s) = \hat{r}_f(s) - \hat{r}(s)$  より,  $\hat{r}_f(s)$  をパラメトライズすることと  $\hat{e}(s)$  をパラメトライズすることは等価である. 一方, 補題2より, (10) 式は  $\hat{e} \in \mathcal{S}$  と関連しているので,  $\hat{e}(s)$  を用いる方が見通しが良い. そこでここでは, 補題2の(ii)の条件を満足する  $\hat{e}(s)$  のパラメトリゼーションを導出する.

まず,  $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$  の不安定零点に関する条件のみを満足する  $\hat{e} \in \mathcal{S}$  のパラメトリゼーションについて考える.

**【補題3】**  $z_i$  ( $i = 1, \dots, m_z$ ) は  $\text{Re}(z_i) > 0$  かつ  $z_i \neq z_j$  ( $i \neq j$ ) となるように任意に与えられた複素数,  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m_z-1}$ ,  $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{m_z}$  は任意に与えられた正の実数とする. さらに,  $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$  が任意に与えられたものとする. このとき, 任意の  $\hat{e}(s)$  に対して次の2つの条件は等価である.

(i)  $\hat{e} \in \mathcal{S}$  かつ(16)式が成り立つ.

(ii) 次式

$$\hat{e} \in \mathcal{S}_0 = A_0(s) + B_0(s)\mathcal{S} \quad (22)$$

が成り立つ. ただし,

$$A_0(s) = \sum_{i=1}^{m_z} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (s - z_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)} \hat{r}(z_i) \quad (23)$$

$$B_0(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_z} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{m_z} (s + \tilde{b}_i)} \quad (24)$$

である.

(証明) (i)  $\rightarrow$  (ii):  $\hat{e} \in \mathcal{S}_0$  を示すためには,

$$\hat{e}(s) = A_0(s) + B_0(s)Q(s) \quad (25)$$

となるような  $Q \in \mathcal{S}$  が存在することを示せばよい. これはすなわち,

$$Q(s) = \frac{\hat{e}(s) - A_0(s)}{B_0(s)} \quad (26)$$

で定められる  $Q(s)$  が  $\mathcal{S}$  に属することと等価である.

まず,  $B_0(s)$  が双プロパーで  $\hat{e}(s)$ ,  $A_0(s)$  がプロパーであることから明らかに  $Q(s)$  はプロパーである. 次に, (23) 式より以下が成り立つ.

$$A_0(z_i) = -\hat{r}(z_i), \quad i = 1, \dots, m_z \quad (27)$$

さらに, 仮定より (16) 式が成り立つため, 次式が成り立つ.

$$\hat{e}(z_i) - A_0(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m_z \quad (28)$$

そのため, ある既約な多項式  $h(s)$ ,  $l(s)$  を用いると  $\hat{e}(s) - A_0(s)$  を以下のように与えることができる.

$$\hat{e}(s) - A_0(s) = \frac{l(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s - z_i)}{h(s)} \quad (29)$$

ここで  $\hat{e} \in \mathcal{S}$  であり,  $A_0(s)$  の定義より明らかに  $A_0 \in \mathcal{S}$  であるので,  $h(s)$  はフルビッツ多項式である. このとき,  $Q(s)$  は

$$Q(s) = \frac{l(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s + \tilde{b}_i)}{h(s)} \quad (30)$$

となる. (30) 式の  $Q(s)$  はプロパーかつ閉右半平面で解析的であるので  $Q \in \mathcal{S}$  である. 従って (i)  $\rightarrow$  (ii) が成り立つ.

(ii)  $\rightarrow$  (i):  $\hat{e} \in \mathcal{S}_0$  が成り立つと仮定する. このとき, あきらかに  $\hat{e} \in \mathcal{S}$  である. さらに, ある  $Q \in \mathcal{S}$  を用いて  $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$  を次式で表すことができる.

$$\hat{r}(s) + \hat{e}(s) = \hat{r}(s) + A_0(s) + B_0(s)Q(s) \quad (31)$$

このとき,  $A_0(s)$ ,  $B_0(s)$  の定義より, 各  $i = 1, \dots, m_z$  に対して  $B_0(z_i) = 0$ ,  $\hat{r}(z_i) + A_0(z_i) = 0$  が成り立つ. よって (31) 式より (16) 式が成り立つ.  $\square$

次に,  $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$  の相対次数および不安定零点に関する条件を満たす  $\hat{e}(s)$  のパラメトリゼーションについて考える. この場合には, 以下の定理が得られる.

**【定理1】**  $z_i$  ( $i = 1, \dots, m_z$ ) は  $\text{Re}(z_i) > 0$  かつ  $z_i \neq z_j$  ( $i \neq j$ ) となるように任意に与えられた複素数,  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m_z-1}$ ,  $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{m_z}$ ,  $\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{m_r}$  は任意に与えられた正の実数とする. さらに,  $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$  が任意に与えられたものとする. このとき, 任意の  $\hat{e}(s)$  に対して次の2つの条件は

等価である。

- (i)  $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$  の相対次数は  $m_r$  より大きく、かつ、 $\hat{e} \in \mathcal{S}$ 、(16) 式が成り立つ。  
(ii)  $\hat{e} \in \mathcal{S}_{m_r+1}$  が成り立つ。ただし、

$$\mathcal{S}_{m_r+1} = A_{m_r+1}(s) + B_{m_r+1}(s)\mathcal{S} \quad (32)$$

であり、 $A_k(s)$ 、 $B_k(s)$ 、 $i = 1, \dots, m_r + 1$  は次の漸化式

$$A_{k+1}(s) = A_k(s) + \alpha_k B_k(s) \quad (33)$$

$$B_{k+1}(s) = B_k(s) \frac{1}{s + \tilde{c}_k} \quad (34)$$

$$\alpha_k = - \lim_{s \rightarrow \infty} s^k (\hat{r}(s) + A_k(s)) \quad (35)$$

で定義される関数、 $A_0(s)$ 、 $B_0(s)$  はそれぞれ (23)、(24) 式で定義される関数である。

(証明) 定理 1 の証明には付録で示される補題 5~7 を用いる。

(i)  $\rightarrow$  (ii):  $\hat{e}(s)$  が (i) を満足すると仮定する。このとき、次式を満たす  $Q \in \mathcal{S}$  が存在することを示せばよい。

$$\hat{e}(s) = A_{m_r+1}(s) + B_{m_r+1}(s)Q(s) \quad (36)$$

これはすなわち、

$$Q(s) = \frac{\hat{e}(s) - A_{m_r+1}(s)}{B_{m_r+1}(s)} \quad (37)$$

が  $\mathcal{S}$  に属することと等価である。補題 5、補題 7 より、 $B_{m_r+1}(s)$  の相対次数は  $m_r + 1$ 、 $\hat{e}(s) - A_{m_r+1}(s)$  の相対次数は  $m_r + 1$  以上であることから  $Q(s)$  はプロパーである。一方、補題 7 より  $\hat{e}(s) - A_{m_r+1}(s)$  は、ある既約な多項式  $h(s)$ 、 $l(s)$  を用いると以下のように表すことができる。

$$\hat{e}(s) - A_{m_r+1}(s) = \frac{l(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s - z_i)}{h(s)} \quad (38)$$

ここで、 $\hat{e} \in \mathcal{S}$  および  $A_{m_r+1} \in \mathcal{S}$  より  $h(s)$  はフルビッツ多項式である。(38) 式を用いると  $Q(s)$  は以下のように書ける。

$$Q(s) = \frac{l(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s + \tilde{b}_i) \prod_{j=0}^{m_r} (s + \tilde{c}_j)}{h(s)} \quad (39)$$

このとき、 $h(s)$  がフルビッツ多項式であるため  $Q \in \mathcal{S}$  である。よって、(ii) が成り立つ。

(ii)  $\rightarrow$  (i): 補題 6 より  $\hat{r}(s) + A_{m_r+1}(s)$  の相対次数は  $m_r + 1$  以上である。また、補題 5 より  $B_{m_r+1}(s)$  の相対次数も  $m_r + 1$  であるため、任意のプロパーな  $Q(s)$  に対して  $\hat{r}(s) + A_{m_r+1}(s) + B_{m_r+1}(s)Q(s)$  の相対次数は  $m_r$  より大きくなる。

一方、補題 5 より  $B_{m_r+1}(z_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, m_z$ ) が成り立つ。また、補題 6 より次式が成り立つ。

$$\hat{r}(z_i) + A_{m_r+1}(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m_z \quad (40)$$

よって、任意の  $Q(s)$  に対して

$$\hat{r}(z_i) + A_{m_r+1}(z_i) + B_{m_r+1}(z_i)Q(z_i) = 0 \quad (41)$$

となる。 $\hat{e} \in \mathcal{S}$  は  $A_{m_r+1}(s)$ 、 $B_{m_r+1}(s)$  の定義よりあきらかである。以上より  $\hat{e} \in \mathcal{S}_{m_r+1}$  ならば (i) が成り立つ。□

定理 1 は  $\hat{e}$  のパラメトリゼーションを与えている。一方、 $\hat{e}(s) = \hat{r}_f(s) - \hat{r}(s)$  である。よって、定理 1 より、補題 2 の (ii) を満足する  $\hat{r}_f(s)$  の集合が以下のように定まる。

$$\{\hat{r}_f : \hat{r}_f - \hat{r} \in \mathcal{S}_{m_r+1}\} \quad (42)$$

すなわち、2. で提示した問題に対して、 $\hat{r}_f(s)$  の  $Q$ -パラメトリゼーションが求まった。

### 3.2 $L_2$ 最適な $\hat{e}(s)$

前節では  $\hat{e}(s)$  の  $Q$ -パラメトリゼーションを導出する形で  $\hat{r}_f(s)$  のパラメトリゼーションを与えた。本節ではさらに、過渡応答の改善のために  $\hat{e}(s)$  を小さくすることを考える。具体的には  $\hat{e}(s)$  の  $L_2$  ノルムを最小化する問題、すなわち、以下の  $L_2$  最小化問題を考える。

$$\min_{\hat{e} \in \mathcal{S}} \|\hat{e}\|_2 \quad (43)$$

$$\hat{e}(s) = A_{m_r+1}(s) + B_{m_r+1}(s)Q(s) \quad (44)$$

$A_{m_r+1}(s)$  および  $B_{m_r+1}(s)$  が閉右半平面で解析的であることから、 $T_1(s) = A_{m_r+1}(s)$ 、 $T_2(s) = B_{m_r+1}(s)$ 、 $T_3(s) = 1$  とすることで (43) 式の  $L_2$  最小化問題は、標準的なモデルマッチング問題

$$\min_{Q \in \mathcal{S}} \|T_1 + T_2 Q T_3\|_2 \quad (45)$$

として扱うことができる。ここで、補題 6 および  $\hat{r}(s)$  の相対次数が 1 以上であることから、 $A_{m_r+1}(s)$  の相対次数は 1 以上である。よって、(45) 式のモデルマッチング問題は可解である。

以降では特に

$$\hat{e}^*(s) = \arg \inf \{\|\hat{e}\|_2 : \hat{e} \in \mathcal{S}_{m_r+1}\} \quad (46)$$

を陽に求めることを考える。 $L_2$  ノルムの最小化問題において、次の補題が知られている。

【補題 4】 閉右半平面で解析的な有理関数  $A(s)$ 、 $B(s)$ 、 $Q(s)$  が与えられ、 $A(s)$  および  $B(s)$  は厳密にプロパーであると仮定する。さらに、 $B(s)$  のインナー・アウトパー分解が

$$B(s) = \Psi(s)\Phi(s) \quad (47)$$

と表されるとする。ただし、 $\Psi(s)$ 、 $\Phi(s)$  はそれぞれインナー関数、アウトパー関数である。このとき、次式が成り立つ。

$$\|A+BQ\|_2^2 = \|(\Psi^{-1}A)_{unst}\|_2^2 + \|(\Psi^{-1}A)_{st} + \Phi Q\|_2^2 \quad (48)$$

ここで,  $(\Psi(s)^{-1}A(s))_{unst}$ ,  $(\Psi^{-1}(s)A(s))_{st}$  は, それぞれ  $\Psi(s)^{-1}A(s)$  を部分分数分解したときの反安定部分 (閉左半平面で解析的), 安定部分 (閉右半平面で解析的) である.

(証明)  $|\Psi(j\omega)| = 1, \forall \omega \in R$  より次式が成り立つ.

$$\|A+BQ\|_2^2 = \|\Psi^{-1}A + \Phi Q\|_2^2 \quad (49)$$

さらに,  $\Psi^{-1}(s)A(s)$  を部分分数分解すると次式が成り立つ.

$$\|\Psi^{-1}A + \Phi Q\|_2^2 = \|(\Psi^{-1}A)_{unst} + (\Psi^{-1}A)_{st} + \Phi Q\|_2^2 \quad (50)$$

ここで,

$$(\Psi^{-1}A)_{unst} \in H_2^\perp \quad (51)$$

$$(\Psi^{-1}A)_{st} + \Phi Q \in H_2 \quad (52)$$

であるから, 文献 [7] より (48) 式が成り立つ.  $\square$

補題 4 より,  $L_2$  最適な  $Q(s)$  は次式を解くことで求まる.

$$J = \inf \|(\Psi^{-1}A_{m_r+1})_{st} + \Phi Q\|_2^2 \quad (53)$$

ただし,  $\Psi(s)$ ,  $\Phi(s)$  はそれぞれ  $B_{m_r+1}(s)$  のインナー, アウター, すなわち,

$$\Psi(s) = \prod_{i=1}^{m_z} \frac{s - z_i}{s + \bar{z}_i} \quad (54)$$

$$\Phi(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_z} (s + \bar{z}_i)}{\prod_{i=1}^{m_z} (s + \tilde{b}_i) \prod_{j=0}^{m_r} (s + \tilde{c}_j)} \quad (55)$$

である. よって,  $\|\hat{e}\|_2$  を最小にする  $Q(s)$  は次式

$$Q(s) = -\Phi^{-1}(s)(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} \quad (56)$$

で与えられ, このとき  $J=0$  となる.

以上より, (46) 式の  $\hat{e}^*(s)$  に関して次の定理が成り立つ.

**【定理 2】**  $\hat{e}^*(s)$  は次式で与えられる.

$$\hat{e}^*(s) = -\sum_{i=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (z_i + \bar{z}_j) \prod_{k=1, i \neq k}^{m_z} (s - z_k)}{\prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z} (s + \bar{z}_k)} \quad (57)$$

(証明) (56) 式の  $Q(s)$  を (44) 式に代入すると,  $\hat{e}^*(s)$  は次式で与えられる.

$$\hat{e}^*(s) = A_{m_r+1}(s) - \Psi(s)(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} \quad (58)$$

定理 1 より,

$$A_{m_r+1}(s) = A_0(s) + \sum_{k=0}^{m_r} \alpha_k B_k(s) \quad (59)$$

であるため,  $\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s)$  は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s) &= \\ &= \sum_{i=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (s + \bar{z}_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{(s - z_i) \prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z} (s + \tilde{a}_k)} \\ &+ \Psi^{-1}(s) \sum_{k=0}^{m_r} \alpha_k B_k(s) \end{aligned} \quad (60)$$

ここで,  $\hat{r}(s) + A_{m_r+1}(s)$ ,  $\hat{r}(s)$  がそれぞれ厳密にプロパーであることから,  $A_{m_r+1}(s)$  は厳密にプロパーであり, さらに,  $\Psi^{-1}(s)$  が双プロパーであることから  $\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s)$  も厳密にプロパーである. さらに,  $\Psi^{-1}(s)$ ,  $A_{m_r+1}(s)$  共に虚軸上に極を持たないことから  $\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s)$  は虚軸上に極を持たない. よって, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} &= \\ &= \Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s) - (\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{unst} \end{aligned} \quad (61)$$

このとき,  $B_k(s)$  はそれぞれ  $z_i$  ( $i=1, \dots, m_z$ ) の零点を持つため  $\Psi^{-1}(s)B_k(s)$  ( $k=0, \dots, m_r$ ) はすべて閉右半平面に極を持たない. そのため,  $(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{unst}$  は  $\Psi^{-1}(s)$  の極  $z_i$  ( $i=1, \dots, m_z$ ) のうちで  $A_0(s)$  の零点で相殺されない部分のみにより構成される. すなわち, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{unst} &= \\ &= \sum_{i=1}^{m_z} \lim_{s \rightarrow z_i} \left( -\frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (s + \bar{z}_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{\prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)} \right) \\ &\cdot \frac{1}{s - z_i} \\ &= -\sum_{i=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (z_i + \bar{z}_j)}{(s - z_i) \prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j)} \end{aligned} \quad (62)$$

さらに, (62) 式を (61) 式に代入すると次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} &= \\ &= \Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s) \\ &+ \sum_{i=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (z_i + \bar{z}_j)}{(s - z_i) \prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j)} \end{aligned} \quad (63)$$

よって, (63) 式を (58) 式に代入することで

$$\begin{aligned} A_{m_r+1}(s) - \Psi(s)(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} &= \\ &= A_{m_r+1}(s) - \Psi(s)\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s) \\ &- \Psi(s) \sum_{i=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (z_i + \bar{z}_j)}{(s - z_i) \prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j)} \\ &= -\sum_{i=1}^{m_z} \Psi(s) \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (z_i + \bar{z}_j)}{(s - z_i) \prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j)} \end{aligned} \quad (64)$$

となり、(57)式が成り立つ。  $\square$

定理2は、 $\|\hat{e}\|_2$ が下界値を取るような $\hat{e}^*(s)$ の解析解を与えている。このことから、異なる $\hat{r}(s)$ に対して、LMIなどの数値最適化を繰り返すことなく $\hat{r}_f^*(s)$ が求まる。この解析解から、 $\hat{r}(z_i)$ が全ての $i$ について小さければ、 $\|\hat{e}\|_2$ が小さいことがわかる。

また、制御対象の初期状態をある程度自由に変更できる場合には、(13)式に対して $\hat{r}_{x(0)}(z_i)$ が小さくなるように選ぶことで、参照信号と出力の偏差の $L_2$ ノルムを小さくすることができる。特に任意に初期状態を選べる場合には、 $\hat{r}_{x(0)}(z_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, m_z$ )となるように $x(0)$ を選ぶことができれば、偏差の $L_2$ ノルムの下限を零とすることができる。

一方、偏差の $L_2$ ノルムに関して次の系が成り立つ。

**【系1】**  $\hat{r} \in \mathcal{S}_b$ が任意に与えられたとする。このとき任意の $\hat{r}_f \in \mathcal{S}_{m_r+1} + \hat{r}$ について次式が成り立つ。

$$\|\hat{r} - \hat{r}_f\|_2^2 = \|\hat{r} - \hat{r}_f^*\|_2^2 + \|\hat{r}_f^* - \hat{r}_f\|_2^2 \quad (65)$$

ただし、 $\hat{r}_f^*(s) = \hat{r}(s) + \hat{e}^*(s)$ である。

(証明) (48)式において $A = A_{m_r+1}(s)$ 、 $B = B_{m_r+1}(s)$ とした場合に、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|\hat{r} - \hat{r}_f\|_2^2 &= \|A_{m_r+1} + B_{m_r+1}Q\|_2^2 \\ &= \|(\Psi^{-1}A_{m_r+1})_{unst}\|_2^2 \\ &\quad + \|(\Psi^{-1}A_{m_r+1})_{st} + \Phi Q\|_2^2 \end{aligned} \quad (66)$$

一方で、 $\hat{e} = \hat{e}^*$ のとき $J = 0$ となることから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|\hat{r} - \hat{r}_f^*\|_2^2 &= \|\hat{e}^*\|_2^2 \\ &= \|(\Psi^{-1}A_{m_r+1})_{unst}\|_2^2 \end{aligned} \quad (67)$$

さらに、 $\hat{r}_f^*(s) - \hat{r}_f(s)$ について次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \hat{r}_f^*(s) - \hat{r}_f(s) &= \\ &= \hat{r}(s) + A_{m_r+1}(s) - \Psi(s)(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} \\ &\quad - \hat{r}(s) - A_{m_r+1}(s) - B_{m_r+1}(s)Q(s) \\ &= -\Psi(s)[(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st} + \Phi Q(s)] \end{aligned} \quad (68)$$

である。ここで、 $\Psi$ がインナーであることから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|\hat{r}_f^* - \hat{r}_f\|_2^2 &= \|\Psi[(\Psi^{-1}A_{m_r+1})_{st} + \Phi Q]\|_2^2 \\ &= \|(\Psi^{-1}A_{m_r+1})_{st} + \Phi Q\|_2^2 \end{aligned} \quad (69)$$

よって、(66)、(67)、(69)式より(65)式が成り立つ。  $\square$

系1より、 $\|\hat{e}\|_2^2$ は $\|\hat{r} - \hat{r}_f^*\|_2^2$ と $\|\hat{r}_f^* - \hat{r}_f\|_2^2$ の和で表される。このうち、 $\|\hat{r} - \hat{r}_f^*\|_2^2$ は定数であるため、 $\|\hat{e}\|_2^2$ は $\|\hat{r} - \hat{r}_f^*\|_2^2 = \|\hat{e}^*\|_2^2$ よりも小さくすることができない。一方、 $\hat{r}_f$ によって変化するのは $\|\hat{r}_f^* - \hat{r}_f\|_2^2$ のみであり、 $\|\hat{r}_f^* - \hat{r}_f\|_2^2$ は $\hat{r}_f$ によっていくらかでも小さくすることができる。よって $\hat{r}_f(s)$ を $\hat{r}(s)$ に近づけることは、 $\hat{r}_f(s)$

を $\hat{r}_f^*(s)$ に近づけることと等価である。 $\|\hat{r}_f^* - \hat{r}_f\|_2^2$ にはオフセットが含まれていないため、 $\hat{r}_f(s)$ による変化をより明確に評価することができる。 $\hat{r}_f^*(s) - \hat{r}_f(s)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{r}_f^*(s) - \hat{r}_f(s) &= \hat{e}^*(s) - \hat{e}(s) \\ &= \mathcal{E}_1(s) + \mathcal{E}_2(s)Q(s) \\ \mathcal{E}_1(s) &= \\ &= \sum_{i=1}^{m_z} \frac{\hat{r}(z_i) \prod_{j=1}^{m_z} (z_i + \bar{z}_j) \prod_{k=1, i \neq k}^{m_z} (s - z_k)}{\prod_{j=1, i \neq j}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z} (s + \bar{z}_k)} \\ &\quad - A_{m_r+1}(s) \\ \mathcal{E}_2(s) &= -B_{m_r+1}(s) \end{aligned} \quad (70)$$

系1を幾何学的に示すことも可能である。 $\hat{r}(s) - \hat{r}_f^*(s)$ と $\hat{r}_f^*(s) - \hat{r}_f(s)$ にそれぞれ $\Psi^{-1}(s)$ を掛けると、それぞれの項は $H_2^1$ および $H_2$ に属しているため、それらは互いに直交する (Fig. 3)。よって、ピタゴラスの定理から(65)式が成り立つ。

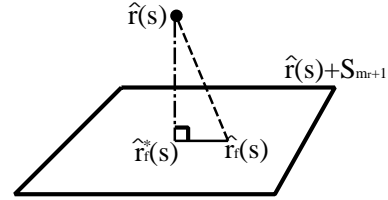


Fig. 3  $\hat{r}(s)$  and space of  $\hat{r}_f(s)$

### 3.3 $\hat{e}$ と $\hat{u}$ の同時最適化

定理2より、 $\hat{r}(z_i)$  ( $i = 1, \dots, m_z$ )さえわかれば $\hat{e}^*(s)$ を解析的に求めることができる。しかしながら、 $B_{m_r+1}(s)$ の相対次数が $\Psi(s)(\Psi^{-1}(s)A_{m_r+1}(s))_{st}$ の相対次数に比べて大きい場合、 $\hat{e}^*(s)$ を達成する $Q(s)$ はインプロパーとなり、 $\hat{u} \in \mathcal{S}_b$ では $\hat{e}^*(s)$ を達成できない。そのような場合には、 $\hat{e}(s)$ だけでなく $\hat{u}(s)$ の大きさも考慮する必要がある。

定理1のパラメトリゼーションを用いると、 $\hat{e} \in \mathcal{S}_{m_r+1}$ を満足するような $\hat{u}(s)$ は、ある $Q \in \mathcal{S}$ を用いて次式で表される。

$$\hat{u}(s) = G^{-1}(s)(\hat{r}(s) + A_{m_r+1}(s) + B_{m_r+1}(s)Q(s)) \quad (71)$$

ここで、 $\hat{u}(s)$ に関して次の定理が成り立つ。

**【定理3】** 次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \hat{u}(s) &= \mathcal{U}_1(s) + \mathcal{U}_2(s) + \mathcal{U}_3(s)Q(s) \\ \mathcal{U}_1(s) &= \frac{l_G(s)}{h_G(s) \prod_{i=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)} \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^{m_z} \frac{(\hat{r}(s) - \hat{r}(z_i)) \prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{(s - z_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (z_i - z_j)} \\ \mathcal{U}_2(s) &= \frac{l_G(s)}{h_G(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s + \tilde{b}_i)} \sum_{k=0}^{m_r} \frac{\alpha_k}{\prod_{j=0}^k (s + \tilde{c}_j)} \end{aligned} \quad (72)$$



$$U_3(s) = \frac{l_G(s)}{h_G(s) \prod_{i=1}^{m_z} (s + \tilde{b}_i) \prod_{j=0}^{m_r} (s + \tilde{c}_j)}$$

(証明) 定理3の証明には, (71)式と(72)式が等しいことを示せばよい. まず, 付録の補題8より次式が成り立つ.

$$\hat{r}(s) + A_0(s) = \sum_{i=1}^{m_z} \frac{(\hat{r}(s) - \hat{r}(z_i)) \prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k) \prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (s - z_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)} \quad (73)$$

(73)式の両辺に $G^{-1}(s)$ を掛けることで

$$\begin{aligned} G^{-1}(s)(\hat{r}(s) + A_0(s)) &= \frac{l_G(s)}{h_G(s) \prod_{i=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)} \\ &= \sum_{i=1}^{m_z} \frac{(\hat{r}(s) - \hat{r}(z_i)) \prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{(s - z_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (z_i - z_j)} \\ &= U_1(s) \end{aligned} \quad (74)$$

が成り立つ. さらに,

$$\begin{aligned} G^{-1}(s) \sum_{k=0}^{m_r} \alpha_k B_k(s) &= U_2(s) \\ G^{-1}(s) B_{m_r+1}(s) &= U_3(s) \end{aligned} \quad (75)$$

が成り立つことから, 定理が成り立つ.  $\square$

定理3の $U_1(s)$ には次の項

$$\frac{\hat{r}(s) - \hat{r}(z_i)}{s - z_i} \quad (76)$$

が含まれている. (76)式は $s = z_i$ において相殺可能な特異点を持つ. そのため,  $U_1(s)$ にはその特異点を相殺したものをを用いる.

定理3より,  $U_1(s) + U_2(s)$ は $U_1 + U_2 \in \mathcal{S}_b$ を満足し, かつ虚軸上に極を持つ. そのため,  $\hat{u}(s)$ は $L_2$ 有界とはならない. よって,  $\hat{u}(s)$ そのものの $L_2$ ノルムを小さくすることはできない.

$U_1(s) + U_2(s)$ が虚軸上に極を持つことから $t \rightarrow \infty$ で $u(t)$ は零とならない. そこでここでは, 入力 of 定常信号 $\hat{u}_\infty(s)$ を

$$\hat{u}_\infty(s) = (U_1(s) + U_2(s)) - (U_1(s) + U_2(s))_{st} \quad (77)$$

と定義し,  $\hat{u}(s)$ と $\hat{u}_\infty(s)$ の差を考える. このとき,  $\hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s)$ は次式で表される.

$$\hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s) = (U_1(s) + U_2(s))_{st} + U_3(s)Q(s) \quad (78)$$

(78)式より, それぞれの項が $\mathcal{S}$ に属し, かつ厳密にプロパーであるため,  $\hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s)$ は任意の $Q \in \mathcal{S}$ に対して $L_2$ 有界である.

以上の結果から,  $Q(s)$ を用いて $\hat{r}_f^*(s) - \hat{r}_f(s)$ だけでなく,  $\hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s)$ の $L_2$ ノルムを最小化する問題も考

えることができる. 一般には, 両者を同時に考慮することが重要となるので, ここでは, 以下の最小化問題を考える.

$$J = \min_Q \delta \|\hat{r}_f^* - \hat{r}_f\|_2^2 + (1 - \delta) \|\hat{u} - \hat{u}_\infty\|_2^2 \quad (79)$$

ただし,  $\delta \in [0, 1]$ は重み定数である. このとき,  $T_1(s)$ ,  $T_2(s)$ ,  $T_3(s)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} T_1 &= \left[ \delta \mathcal{E}_1(s) (1 - \delta) (U_1(s) + U_2(s))_{st} \right]^T \\ T_2 &= \left[ \delta \mathcal{E}_2(s) (1 - \delta) U_3(s) \right]^T \\ T_3 &= 1 \end{aligned}$$

とすることで, (79)式の最小化問題は(45)式で与えられるモデルマッチング問題と等価となる.  $T_1(s)$ は厳密にプロパーかつ安定であるため, モデルマッチング問題は可解である. さらに,  $U_3(s)$ の相対次数は1であるため,  $Q(s)$ がインプロパーな場合には $\hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s)$ の相対次数が0以下となり,  $\hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s)$ の $L_2$ ノルムは有界とならない. よって $\delta < 1$ の場合には最適解 $Q^*(s)$ が $\mathcal{S}$ の中に必ず存在する.

#### 4. 数値例

本節では, 数値例を用いて主結果の検証を行う. ここでは, 制御対象が次のように与えられているとする.

$$G(s) = \frac{-s + 1}{(2s + 1)(5s + 1)} \quad (80)$$

このとき,

$$z_1 = 1, m_r = 1, m_z = 1 \quad (81)$$

である. 本節では, 次の3種類の参照信号を考える.

$$r(t) = u_s(t), \sin(t), \cos(t) \quad (82)$$

ただし,  $u_s(t)$ は単位ステップ関数である.

まず, 参照信号としてステップ信号を考える. ここでは,  $r(t) = u_s(t)$ とした場合について, (79)式で与えられる問題を考え, 重み $\delta$ と時間応答の関係を確認する.

ステップ信号を参照信号とした場合のパラメトリゼーションは次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \hat{e}(s) &= -\frac{2}{s+1} + \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ &\quad + \frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} Q(s) \end{aligned} \quad (83)$$

また,  $\hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s)$ のパラメトリゼーションは以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \hat{u}(s) - \hat{u}_\infty(s) &= \\ &= -\frac{8}{s+1} + \frac{27}{s+2} - \frac{(2s+1)(5s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} Q(s) \end{aligned} \quad (84)$$

ただし,  $\hat{u}_\infty(s) = 1/s$ である.

ここで、 $\delta=1$  の場合には、 $\hat{e}^*(s)$  を達成する  $Q(s)$  および  $\hat{u}(s)$  は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} Q^*(s) &= -s-3 \\ \hat{u}(s) &= \frac{(2s+1)(5s+1)}{s(s+1)} \end{aligned} \quad (85)$$

このように、(80) 式の  $G(s)$  とステップ目標値に対しては、最適解における  $\hat{u}(s)$  の相対次数は 0 である。これはすなわち、入力がインパルス信号を持つことを意味する。

一方、 $\delta=0, 0.9, 0.99, 0.999$  とした場合にそれぞれ最適な  $Q(s)$  を求めた [8]。各々の  $Q(s)$  を用いた場合の  $\hat{r}_f$  の時間応答および  $\hat{u}$  の時間応答をそれぞれ Fig. 4, Fig. 5 に示す。このとき、点線が  $\delta=0$ 、一点鎖線が  $\delta=0.9$ 、破線が  $\delta=0.99$ 、実線が  $\delta=0.999$  の場合である。 $\delta$  が大きい方が  $r_f(t)$  の速応性は高く、 $\delta$  が小さい方が  $\|u(t)-1\|_2$  が小さくなることわかる。

次に  $\sin(t)$  と  $\cos(t)$  を参照信号  $r(t)$  として用いた場合を考える。それぞれに対するパラメトリゼーションは次のようになる。

$$\hat{e}_{\sin}(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

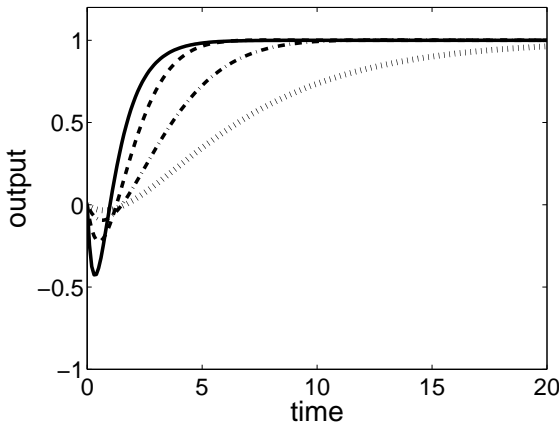


Fig. 4 Time responses of  $\hat{r}_f(s)$

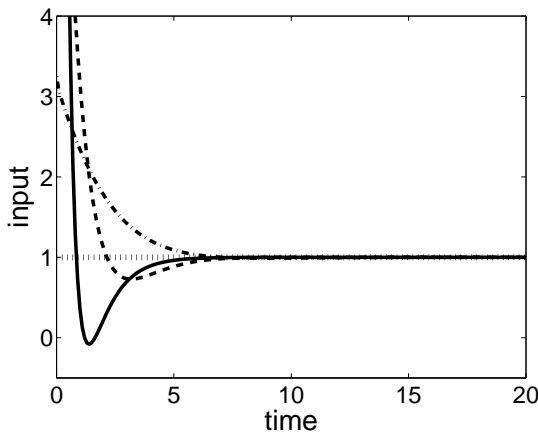


Fig. 5 Time responses of  $\hat{u}(s)$

$$\begin{aligned} &+ \frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} Q(s) \\ \hat{e}_{\cos}(s) &= -\frac{1}{s+1} + \frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} Q(s) \end{aligned}$$

さらに、 $\hat{e}^*(s)$  を達成する  $Q(s)$  はそれぞれ次のように求まる。

$$Q_{\sin}^*(s) = -s-3 \quad (86)$$

$$Q_{\cos}^*(s) = 0 \quad (87)$$

このとき、 $Q_{\sin}^*(s)$  がインプロパーなのに対し、 $Q_{\cos}^*(s)$  はプロパーである。ここでさらに、 $\delta=0, 0.9, 0.999$  とした場合の、それぞれの参照信号  $\hat{r}(s)$  に対する最適な  $\hat{r}_f(s)$  の時間応答は Fig. 6 および Fig. 7 のようになる。ここで、実線、破線、一点鎖線はそれぞれ  $\delta=0.999, 0.9, 0$  の場合を示し、点線は  $\hat{r}(s)$  を示している。Fig. 6 において、 $\delta$  が大きいときには  $\hat{r}(s)$  への速応性が高いことがわかる。一方、Fig. 7 においては、 $\delta$  の変化に対して応答はあまり変化しない。

2. で述べたように、参照信号が不安定零点を持つ場合には、参照信号を加工した信号、すなわち (14) 式を用いた場合と、フィードフォワード入力を直接設計した場合

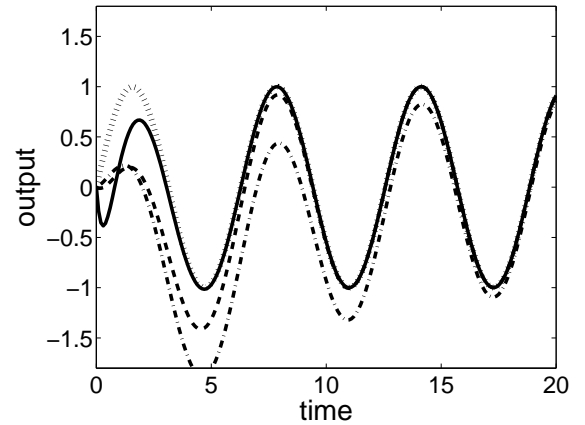


Fig. 6  $r_f^*(t)$  for  $r(t) = \sin(t)$

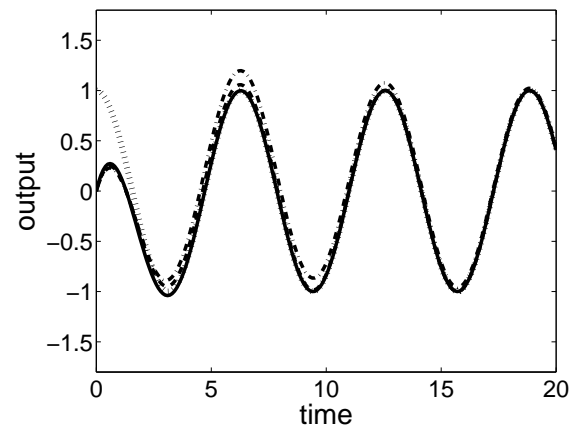


Fig. 7  $r_f^*(t)$  for  $r(t) = \cos(t)$

の差が現れる．そこでここでは，数値例を用いて両者の比較を行う．

ここでは，(80) 式の  $G(s)$  に対して，次式で表される  $\hat{r}(s)$  を参照信号とした数値例を示す．

$$\hat{r}(s) = \frac{s-2}{s^2+1} \quad (88)$$

このとき，参照信号を加工した信号を入力に用いた場合（添字に  $F_r$  を用いる），その出力信号は必ず制御対象の不安定零点と参照信号の不安定零点を持ち，相対次数は制御対象と参照信号の相対次数の和以上となる．逆に，出力信号が制御対象と参照信号の不安定零点を有し，かつ，その相対次数が制御対象と参照信号の相対次数の和以上であれば，その出力信号を達成する安定かつプロパーなフィルタ  $F(s)$  が存在する．よって，Fig. 2 の構成によって達成可能な出力信号の集合は， $m_z=2$ ， $z_1=1$ ， $z_2=2$ ， $m_r=1$  の場合に提案手法で与えられる集合に一致する．それぞれに対するパラメトリゼーションを以下に示す．

$$\begin{aligned} \hat{e}(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)} \\ &\quad + \frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} Q(s) \\ \hat{e}_{F_r}(s) &= \frac{-3(s-2)}{(s+1)(s+2)} + \frac{2(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &\quad + \frac{(s-1)(s-2)}{\prod_{i=1}^4 (s+i)} Q(s) \end{aligned} \quad (89)$$

さらに， $\hat{e}^*(s)$  および  $\hat{e}_{F_r}^*(s)$  はそれぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \hat{e}^*(s) &= \frac{1}{s+1} \quad (90) \\ \hat{e}_{F_r}^*(s) &= -\frac{3(s-2)}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

このとき，

$$\|e^*\|_2^2 = 0.5, \quad \|e_{F_r}^*\|_2^2 = 4.5 \quad (91)$$

となることから，参照信号を加工した信号の方が偏差の  $L_2$  ノルムは大きくなるのがわかる．

さらにここでは，それぞれの場合について (79) 式の最小化問題を考える．各  $\delta$  に対する評価関数値  $J$  を Fig. 8 に示す．実線はフィードフォワード入力を直接設計した場合，破線は参照信号をフィルタで加工する場合である．Fig. 8 より，フィードフォワード入力を直接設計する方が，評価関数値をより小さくできることがわかる．特に， $\delta=0$  でフィルタを用いた場合の評価関数値が非零であることから，参照信号を加工する場合には  $u(s) - u_\infty(s) = 0$  とはできないことがわかる．

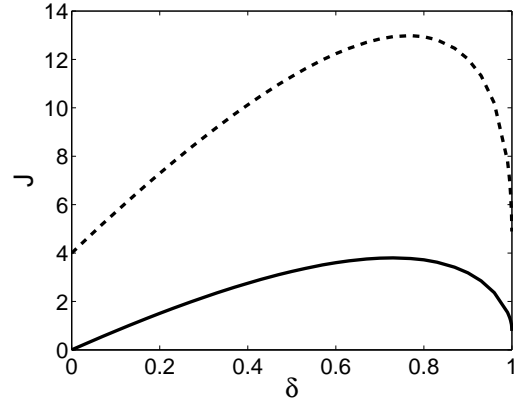


Fig. 8 Optimal value of  $J$

## 5. おわりに

本論文では不安定零点を有する制御対象が与えられた場合において，信号のクラスを，そのラプラス変換が有理多項式で表されるクラスに限定することで，有界な入力で達成でき，かつ参照信号に漸近的に一致するような制御出力の集合の  $Q$  パラメトリゼーションを与えた．さらに，参照信号と制御出力の偏差の  $L_2$  ノルムが最小となる出力を解析的に導出し，その出力に関して偏差の  $L_2$  ノルムを分解できることを示した．また，得られたパラメトリゼーションを用いることで，入力および出力の偏差に関する  $L_2$  最適化問題をモデルマッチング問題の枠組みで扱えることを示し，数値例によりその有効性を検証した．

**謝辞** 本論文の内容に関して有益なコメントを与えて頂いた東京大学の原辰次教授に感謝いたします．

## 参考文献

- [1] 松尾: 制御系における零点 [IV] 零点と応答波形; 計測と制御, Vol. 29, No. 6, pp. 543-550 (1990)
- [2] 原: 制御系における零点 [VI] 制御系の特性と零点; 計測と制御, Vol. 29, No. 9, pp. 830-838 (1990)
- [3] J. Chen, L. Qiu and O. Toker: Limitations on maximal tracking accuracy; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 45-53 (2000)
- [4] J. Chen, S. Hara and G. Chen: Best Tracking and Regulation Performance Under Control Energy Constraint; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 8, pp. 1320-1336 (2003)
- [5] S. Devasia, D. Chen and B. Paden: Nonlinear Inversion-Based Output Tracking; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 7, pp. 930-942 (1996)
- [6] 木下, 十河, 足立: 勾配法による反復学習制御と Stable inversion との関連性について; 計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 12, pp. 1117-1124 (2000)
- [7] 藤井: フィードバック制御の理論, コロナ社 (1996)
- [8] 増淵, 小原, 須田: LMI 条件を満たすコントローラの統一的構成法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, No. 10,

pp. 1586-1594 (1995)

## 付 録

【補題 5】 任意の  $k=1, \dots, m_r+1$  について (24), (34) 式で与えられる  $B_k(s)$  の相対次数は  $k$  であり, かつ, 次式が成り立つ.

$$B_k(z_i) = 0, \quad i=1, \dots, m_z \quad (\text{A1})$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^k B_k(s) = 1 \quad (\text{A2})$$

(証明) (24), (34) 式より,  $B_k(s)$  は次式で与えられる.

$$B_k(s) = B_0(s) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(s + \tilde{c}_j)} \quad (\text{A3})$$

よって, 明らかに  $B_k(s)$  の相対次数は  $k$  であり, かつ, (A2) 式が成り立つ. さらに,  $B_0(z_i) = 0$  ( $i=1, \dots, m_z$ ) および任意の  $i, k$  に対して  $z_i + \tilde{c}_k \neq 0$  であることから, 任意の  $k$  について

$$B_k(z_i) = 0, \quad i=1, \dots, m_z \quad (\text{A4})$$

となる.  $\square$

【補題 6】 (23), (33), (35) 式で与えられる  $A_k(s)$  に対し,  $\hat{r}(s) + A_k(s)$  の相対次数は  $k$  以上で, かつ任意の  $k=1, \dots, m_r+1$  について

$$\hat{r}(z_i) + A_k(z_i) = 0 \quad i=1, \dots, m_z \quad (\text{A5})$$

が成り立つ.

(証明) (23) 式より  $\hat{r}(z_i) + A_0(z_i) = 0$  が成り立ち,  $\hat{r}(s) + A_0(s)$  の相対次数は明らかに 0 以上である. ここで,  $\hat{r}(z_i) + A_k(z_i) = 0$  が成り立ち,  $\hat{r}(s) + A_k(s)$  の相対次数が  $k$  以上であると仮定する. このとき, (35) 式および補題 5 より  $\hat{r}(s) + A_{k+1}(s)$  に関して次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow \infty} s^k (\hat{r}(s) + A_{k+1}(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^k (\hat{r}(s) + A_k(s) + \alpha_k B_k(s)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

よって,  $\hat{r}(s) + A_{k+1}(s)$  の相対次数は  $k+1$  以上である. また,  $B_k(z_i) = 0$  および  $\hat{r}(z_i) + A_k(z_i) = 0$  より  $\hat{r}(z_i) + A_{k+1}(z_i) = 0$  が成り立つ. よって, 任意の  $k$  に対して (A5) 式が成り立ち, かつ  $\hat{r}(s) + A_k(s)$  の相対次数が  $k$  以上である.  $\square$

【補題 7】 定理 1 の (i) が成り立つならば,  $\hat{e}(s) - A_k(s)$  の相対次数は  $k$  以上で, かつ任意の  $k=1, \dots, m_r+1$  について

$$\hat{e}(z_i) - A_k(z_i) = 0 \quad i=1, \dots, m_z \quad (\text{A7})$$

が成り立つ.

(証明) まず,

$$\hat{e}(s) - A_k(s) = (\hat{r}(s) + \hat{e}(s)) - (\hat{r}(s) + A_k(s)) \quad (\text{A8})$$

が成り立つ. このとき, (16) 式および補題 6 より任意の  $k$  に対して次式が成り立つ.

$$\hat{e}(z_i) - A_k(z_i) = 0, \quad i=1, \dots, m_z \quad (\text{A9})$$

さらに, 仮定より  $\hat{r}(s) + \hat{e}(s)$  の相対次数は  $m_r+1$  以上であり, かつ, 補題 6 より  $\hat{r}(s) + A_k(s)$  の相対次数は  $k$  以上である. よって, 任意の  $k \leq m_r+1$  に対して  $\hat{e}(s) - A_k(s)$  の相対次数は  $k$  以上である.  $\square$

【補題 8】 次式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{m_z} \frac{\prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k) \prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (s - z_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)} = 1 \quad (\text{A10})$$

(証明) (A10) 式の右辺と左辺の差

$$\sum_{i=1}^{m_z} \frac{\prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k) \prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (s - z_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)} - 1 \quad (\text{A11})$$

が零となればよい. ここで, まず  $\prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k) / \prod_{l=1}^{m_z} (s - z_l)$  を (A11) 式に掛けると次のように表される.

$$\sum_{i=1}^{m_z} \frac{\prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{(s - z_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{m_z} (z_i - z_j)} - \frac{\prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)}{\prod_{l=1}^{m_z} (s - z_l)} \quad (\text{A12})$$

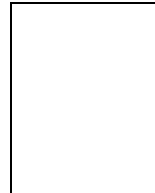
ここでさらに, (A12) 式の第 2 項の部分分数分解は次のように表される.

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)}{\prod_{l=1}^{m_z} (s - z_l)} \\ &= \sum_{i=1}^{m_z} \frac{1}{s - z_i} \lim_{s \rightarrow z_i} \frac{\prod_{k=1}^{m_z-1} (s + \tilde{a}_k)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{m_z} (s - z_l)} \\ &= \sum_{i=1}^{m_z} \frac{\prod_{k=1}^{m_z-1} (z_i + \tilde{a}_k)}{(s - z_i) \prod_{l=1, l \neq i}^{m_z} (z_i - z_l)} \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

よって, (A12) は零となり, 補題は成り立つ.  $\square$

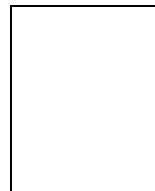
## 著者略歴

おがしま ひろし  
岡島 寛 (学生会員)



1980年5月23日生, 2004年3月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了. 同年4月大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士後期課程入学し, 現在に至る.

あさ い とおる  
浅井 徹 (正会員)



1968年10月6日生, 1996年3月東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修了. 同年1月日本学術振興会特別研究員. 1997年4月~1998年6月カリフォルニア大学パークレー校客員研究員. 1999年3月大阪大学大学院工学研究科助手, 2002年4月同研究科講師 2005年4月同研究科助教授となり現在に至る. ロバスト制御の研究に従事. 博士(工学). 計測自動制御学会の会員.