電気回路演習第二 1

基本回路の過渡現象

電気回路（２）　ｐ８９～

岡島　寛

過渡現象（回路中の電流などは線形微分方程式に支配される） 2

（定係数）線形微分方程式

１次

$$\frac{dy}{dt}+y=0 \qquad \frac{dy}{dt}+5y=0$$

２次

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

ｎ次（３次以上）

$$\frac{d^4y}{dt^4}+4\frac{d^3y}{dt^3}+6\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+3y=0$$

非線形微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\sqrt{y}+y^2=0$$

微分の表現

$$\frac{dy}{dt}, y', \dot{y}$$

過渡現象 3

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

与えられた線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt}+5y=0$$

過渡現象 4

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

与えられた線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt}+5y=0$$

解の候補

① $y(t)=3\exp(-5t)$

② $y(t)=3\exp(-2t)$

③ $y(t)=-4\exp(-5t)$

過渡現象 5

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

与えられた線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt}+5y=0$$

解の候補

① $y(t)=3\exp(-5t)$

② $y(t)=3\exp(-2t)$

③ $y(t)=-4\exp(-5t)$

１．①のy(t)をtで微分

$$\frac{dy}{dt}=-15\exp(-5t)$$

２．線形微分方程式に$y(t)$および$\frac{dy}{dt}$を代入

$$\frac{dy}{dt}+5y=-15\exp(-5t)+15\exp(-5t)=0$$

➡ ①のy(t)は与えられた線形微分方程式の解

過渡現象 6

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

与えられた線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt}+5y=0$$

解の候補

① $y(t)=3\exp(-5t)$

② $y(t)=3\exp(-2t)$

③ $y(t)=-4\exp(-5t)$

１．②のy(t)をtで微分

$$\frac{dy}{dt}=-6\exp(-2t)$$

２．線形微分方程式に$y(t)$および$\frac{dy}{dt}$を代入

$$\frac{dy}{dt}+5y\neq 0$$

➡ ②のy(t)は与えられた線形微分方程式の解ではない

過渡現象 7

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

与えられた線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt}+5y=0$$

解の候補

① $y(t)=3\exp(-5t)$
② $y(t)=3\exp(-2t)$
③ $\boxed{y(t)=-4\exp(-5t)}$

1．③も①と同様に解になる

さらに

$$y(t)=A\exp(-5t)$$

ただしAは定係数

Kumamoto University

過渡現象 8

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

２次（２階）の微分方程式の場合

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

Kumamoto University

過渡現象 9

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

２次（２階）の微分方程式の場合

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

解の候補

① $\boxed{y(t)=4\exp(-t)}$
② $y(t)=15\exp(-2t)$
③ $y(t)=2\exp(-2t)$

Kumamoto University

過渡現象 10

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

２次（２階）の微分方程式の場合

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

解の候補

① $\boxed{y(t)=4\exp(-t)}$
② $y(t)=15\exp(-2t)$
③ $y(t)=2\exp(-2t)$

1．①のy(t)をtで微分，２回微分

$$\frac{dy}{dt}=-4\exp(-t) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=4\exp(-t)$$

2．線形微分方程式に$y(t)$および$\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dt^2}$を代入

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=4\exp(-t)-3*4\exp(-t)+2*4\exp(-t)=0$$

①のy(t)は与えられた線形微分方程式の解

Kumamoto University

過渡現象 11

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

２次（２階）の微分方程式の場合

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

解の候補

① $y(t)=4\exp(-t)$
② $\boxed{y(t)=15\exp(-2t)}$
③ $y(t)=2\exp(-2t)$

1．②のy(t)をtで微分，２回微分

$$\frac{dy}{dt}=-30\exp(-2t) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=60\exp(-2t)$$

2．線形微分方程式に$y(t)$および$\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dt^2}$を代入

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=60\exp(-2t)-3*30\exp(-2t)+2*15\exp(-2t)=0$$

②のy(t)は与えられた線形微分方程式の解

Kumamoto University

過渡現象 12

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

２次（２階）の微分方程式の場合

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

解の候補

① $y(t)=4\exp(-t)$
② $y(t)=15\exp(-2t)$
③ $y(t)=2\exp(-2t)$

1．①，②，③ともに解となる
さらに線形結合も解になる（各自確かめる）

微分方程式の解

$$y(t)=A_1\exp(-t)+A_2\exp(-2t)$$

Kumamoto University

過渡現象 13

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

具体的な導出手順：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

1． $y(t)=\exp(pt)$**を微分方程式に代入（特性方程式を導く）**

$$\left(p^2+3p+2\right)y=0 \Rightarrow p^2+3p+2=0$$

2．特性方程式の根を計算

$$p=-1,-2$$

3．解を得る

$$y(t)=A_1\exp(-t)+A_2\exp(-2t)$$

Kumamoto University

過渡現象 14

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

2次方程式の解のパターン

$$\left(p^2+m_1p+m_2\right)y=0 \Rightarrow p^2+m_1p+m_2=0$$

特性方程式の根の種類別

1．異なる実数の場合　例 $p=-1,-2 \quad (p^2+3p+2=0)$

$$y(t)=A_1\exp(-t)+A_2\exp(-2t)$$

2．同じ実数の場合（重根）　例 $p=-1 \quad (p^2+2p+1=0)$

$$y(t)=A_1t\exp(-t)+A_2\exp(-t)$$

3．複素数の場合　例 $p=-1\pm\omega j \quad (p^2+2p+1+\omega^2=0)$

$$y(t)=A\exp(-t)\sin(\omega t+\theta)$$

Kumamoto University

過渡現象 15

目的：線形微分方程式を満足する解$y(t)$を見つける

$$\frac{d^2y}{dt^2}+m_1\frac{dy}{dt}+m_2y=f(t)$$

線形微分方程式の解は補解と特解の和で表される

補解

同次式

$$\frac{d^2y_f}{dt^2}+m_1\frac{dy_f}{dt}+m_2y_f=0 \Rightarrow y_f=A_1\exp(p_1t)+A_2\exp(p_2t)$$

特解

$$\frac{d^2y_s}{dt^2}+m_1\frac{dy_s}{dt}+m_2y_s=f(t)$$ ⇒ **例えば** $f(t)=1$ **で定値なら** $y_s=\frac{1}{m_2}$

補解と特解を辺々足すと，$y=y_f+y_s$ **は微分方程式を満たす！**

Kumamoto University